

Ejercicio 1

Se tienen dos procesos aleatorios $X(t)$ e $Y(t)$ con media nula y funciones de autocorrelación

$$R_X(t + \tau, t) = \delta(\tau) \quad R_Y(t + \tau, t) = e^{-|\tau|}$$

a) Para ambos procesos:

- I) Calcule la densidad espectral de potencia y la potencia del proceso.
- II) Discuta si el proceso es estacionario o cicloestacionario y si es o no blanco, explicando claramente la razón.

b) Se define ahora el proceso $Z(t) = X(t - 1) + 2$.

- I) Calcule la función de autocorrelación y la densidad espectral de potencia de $Z(t)$.
- II) Calcule la función de correlación cruzada $R_{XZ}(t + \tau, t)$ y la densidad espectral cruzada $S_{XY}(j\omega)$ entre los procesos $X(t)$ y $Z(t)$.
- III) Discuta si el proceso $Z(t)$ es estacionario o cicloestacionario, si es blanco, y si los procesos $X(t)$ y $Z(t)$ son conjuntamente estacionarios, explicando claramente la razón.

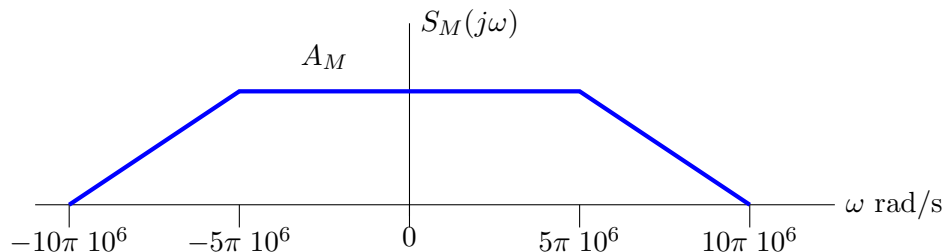
Algunas expresiones de interés:

$$\int \frac{1}{t} dt = \ln |t|, \quad \int a^t dt = \frac{a^t}{\ln a}, \quad \int \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan(t), \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \arcsen(t)$$

(2,5 puntos)

Ejercicio 2

La señal moduladora de un sistema de comunicaciones tiene la siguiente densidad espectral de potencia



Su potencia es de 1 vatio y $-1 \leq m(t) \leq 1$. Durante la transmisión la potencia de la señal que llega a la entrada del receptor es de 10 pico vatios y la temperatura de trabajo son 290 grados Kelvin. La portadora tiene una frecuencia de 100 MHz y amplitud unidad.

- Si se utiliza una modulación AM convencional con índice de modulación $1/2$, dibuje la densidad espectral de potencia de la señal modulada y calcule su ancho de banda y la relación señal a ruido con un receptor óptimo. En la figura, los dos ejes deben estar etiquetados adecuadamente.
- Repita el apartado anterior si se utiliza una modulación AM de doble banda lateral.
- Repita el apartado anterior si se utiliza una modulación AM de banda lateral única, de banda lateral inferior.
- Repita el apartado anterior si se utiliza una modulación AM de banda lateral vestigial, de banda lateral superior, con un vestigio de 500 kHz.
- Calcule el ancho de banda y la relación señal a ruido si se utilizan
 - Una modulación de fase con índice de modulación 3.
 - Una modulación de frecuencia con índice de modulación 3.

A continuación se indican los valores de algunas constantes de interés

- Constante de Boltzmann: $1,38 \times 10^{-23} \text{ J/}^\circ\text{K}$
- Constante de Plank: $6,62 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$

(2,5 puntos)

Ejercicio 3

Un sistema digital de comunicaciones utiliza la constelación y el modulador

$$\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} +2 \\ +2 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_5 = \begin{bmatrix} -2 \\ +2 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_6 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_7 = \begin{bmatrix} +2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\phi_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}}, & \text{si } 0 \leq t < T \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad \phi_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}}, & \text{si } 0 \leq t < T/2 \\ -\frac{1}{\sqrt{T}}, & \text{si } T/2 \leq t < T \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La transmisión se realiza sobre un canal gaussiano con densidad espectral de potencia $N_0/2$.

- a) Dibuje o proporcione las expresiones analíticas para las señales asociadas a los vectores $\mathbf{a}_0$ y $\mathbf{a}_7$, calcule la energía media por símbolo de la constelación para símbolos equiprobables, diseñe el demodulador óptimo basado en filtros adaptados causales y represente la respuesta de dichos filtros causales.
- b) Si sólo se utilizan, de forma equiprobable, los primeros 4 símbolos, $\{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$:
- Diseñe el decisor óptimo.
 - Calcule la probabilidad de error exacta del sistema.
- c) Si se utilizan los 8 símbolos de forma equiprobable:
- Diseñe el decisor óptimo.
 - Aproxime la probabilidad de error, y acótela mediante la cota de la unión.

(2,5 puntos)

Ejercicio 4

Se tienen dos canales discretos equivalentes con entrada X y salida Y que están dados por las siguientes probabilidades conjuntas entre entrada y salida

$p_{X,Y}(x_i, y_j)$	x_0	x_1
y_0	$\alpha (1 - \epsilon_0)$	0
y_1	$\alpha \epsilon_0$	0
y_2	0	$(1 - \alpha) \epsilon_1$
y_3	0	$(1 - \alpha) (1 - \epsilon_1)$

Canal A

$p_{X,Y}(x_i, y_j)$	x_0	x_1
y_0	α	$(1 - \alpha) \epsilon$
y_1	0	$(1 - \alpha) (1 - \epsilon)$

Canal B

- Para el Canal A, obtenga la matriz de canal y represente el canal mediante un diagrama de flechas.
- Para el Canal A, calcule las siguientes medidas cuantitativas de información:
 - $H(X)$, $H(Y)$, $H(X, Y)$, $H(X|Y)$, $H(Y|X)$, $I(X, Y)$
- Para el Canal B, calcule su capacidad de canal.

_____ (2,5 puntos)