Ejercicio 1

Un proceso aleatorio $Y(t)$ se define como

$$Y(t) = X(t)X(t-1)\sin(2\pi t)$$

donde $X(t) = \cos(\pi t + \theta)$ y θ es una variable aleatoria con distribución uniforme entre 0 y 2π.

a) Calcule la varianza de la variable aleatoria $Y(0)$

b) Calcule la media del proceso $Y(t)$.

c) Calcule la función de autocorrelación del proceso $Y(t)$.

d) ¿Es $Y(t)$ estacionario en sentido amplio? ¿Es $Y(t)$ cicloestacionario? ¿Es $Y(t)$ ergódico?

e) Calcule la densidad espectral de potencia del proceso $Y(t)$.

f) Calcule la potencia del proceso $Y(t)$.

(2,5 puntos)

Ejercicio 2

Un sistema de comunicaciones analógico se diseña para transmitir una señal moduladora de potencia 1 vatio, que cumple $|m(t)| \leq 2$ V, y con la siguiente densidad espectral de potencia:

$$S_M(j\omega) = \begin{cases} A_M \left(1 - \left|\frac{\omega}{W_M}\right|\right), & |\omega| \leq W_M \\ 0, & |\omega| > W_M \end{cases} \quad \text{con } W_M = 2\pi \times 10^7 \text{ rad/s.}$$

Tras la transmisión, la potencia de la señal modulada a la entrada del receptor es de 4 pW y la temperatura de ruido en el receptor es de 290ºK ($N_0 = 4 \times 10^{-21}$ vatios/Hz). La portadora tiene frecuencia 100 MHz y amplitud unidad.

a) Para una modulación AM convencional, con índice de modulación 1:
   - I) Dibuje la densidad espectral de potencia de la señal modulada.
   - II) Calcule la relación señal a ruido a la salida de un receptor coherente, expresada en dB, y el ancho de banda en Hz.

b) Para una modulación de doble banda lateral, repita el apartado anterior.

c) Para una modulación de banda lateral única, de banda lateral inferior:
   - I) Dibuje los diagramas de bloques de los transmisores mediante filtrado directo (dibuje la respuesta en frecuencia del filtro o filtros incluidos) y mediante un modulador de Hartley.
   - II) Calcule la relación señal a ruido a la salida de un receptor coherente, expresada en dB, y el ancho de banda en Hz.

d) Para una modulación de banda lateral vestigial, de banda lateral superior y vestigio de 1 MHz:
   - I) Dibuje la densidad espectral de potencia de la señal modulada.
   - II) Calcule la relación señal a ruido a la salida de un receptor coherente, expresada en dB, y el ancho de banda en Hz.

e) Calcule la relación señal a ruido en dB y el ancho de banda en Hz:
   - I) Para una modulación de fase con índice de modulación 5.
   - II) Para una modulación de frecuencia con índice de modulación 3.

<u>NOTA</u>: Las figuras de $S_S(j\omega)$ o de respuestas en frecuencia deben tener los dos ejes etiquetados.

(2,5 puntos)

Ejercicio 3

Un sistema digital de comunicaciones utiliza la constelación

$$\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} +2 \\ +2 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ +2 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} +2 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} +1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ +1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_6 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Se transmite sobre un canal gausiano con $S_n(j\omega) = N_0/2$ y N_0 =4/0,693=5,772 vatios/Hz.

a) Diseñe un modulador válido para este sistema y, a partir del mismo, diseñe el demodulador óptimo basado en filtros adaptados causales y represente la respuesta de dichos filtros causales.

b) Si sólo se utilizan los primeros 4 símbolos, $\{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$, con $p_A(\mathbf{a}_0) = p_A(\mathbf{a}_3) = 1/6$ y $p_A(\mathbf{a}_1) = p_A(\mathbf{a}_2) = 1/3$:

   I) Calcule la energía media por símbolo del sistema y realice la asignación binaria óptima.
   II) Diseñe el decisor óptimo.
   III) Calcule la probabilidad de error exacta del sistema.

c) Si se utilizan los 8 símbolos de forma equiprobable:

   I) Calcule la energía media por símbolo del sistema.
   II) Diseñe el decisor óptimo.
   III) Aproxime la probabilidad de error, y acótela mediante la cota de la unión.

x	2	3	4	5
$\ln x$	0.693	1.098	1.386	1.609

(2,5 puntos)

Ejercicio 4

Dos variables aleatorias X e Y modelan la entrada y la salida, respectivamente, de un canal discreto sin memoria (DMC). Las probabilidades conjuntas entre entrada X y salida Y son:

$p_{X,Y}(x_i, y_j)$	x_0	x_1	x_2	x_3
y_0	$\frac{\alpha}{2}$	$\frac{\alpha(1-\varepsilon)}{2}$	$\frac{(1-\alpha)\varepsilon}{2}$	0
y_1	0	$\frac{\alpha\varepsilon}{2}$	$\frac{(1-\alpha)(1-\varepsilon)}{2}$	$\frac{(1-\alpha)}{2}$

a) Obtenga la matriz de canal y dibuje el diagrama de flechas que representan el DMC.

b) Calcule las siguientes medidas cuantitativas de información:

- $H(X)$, $H(Y)$, $H(X,Y)$, $H(X|Y)$, $H(Y|X)$, $I(X,Y)$

y dibuje, en función de α (tenga en cuenta su rango válido), $H(X)$, $H(Y)$ y $H(Y|X)$.

c) Calcule la capacidad de canal del DMC.

(2,5 puntos)