uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

Teoría de la Comunicación

Capítulo 1

Ruido en los sistemas de comunicaciones

Marcelino Lázaro

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad Carlos III de Madrid

CC BY NC SA

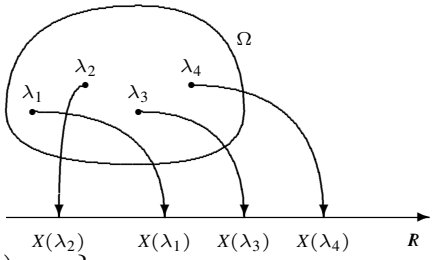
Índice de contenidos

- Revisión de conceptos de probabilidad
  - Variable aleatoria
  - Procesos aleatorios
    - Caracterización en el dominio temporal
- Caracterización de procesos aleatorios en el dominio frecuencial
  - Densidad espectral de potencia
- Procesos aleatorios en sistemas lineales
- Caracterización del ruido en sistemas de comunicaciones
  - Procesos blancos
  - Procesos gausianos
  - Suma de procesos aleatorios
  - Modelo estadístico del ruido térmico
  - Relación señal a ruido

Variable aleatoria (Real)

Función que asigna un valor numérico (real) a la salida de un experimento aleatorio

$$\Omega \to \boldsymbol{R}$$
$$\lambda \in \Omega \to X(\lambda) \in \boldsymbol{R}$$



- Rango de X: $\text{Rango}_X = \{x \in \boldsymbol{R} : \exists\, \lambda \in \Omega,\ X(\lambda) = x\}$
  - V.a. discreta: rango formado por conjunto discreto de valores
  - V.a. continua: rango continuo de valores
- Descripción (probabilística):
  - Función de distribución: $F_X(x)$
  - Función densidad de probabilidad: $f_x(x)$

Función de distribución

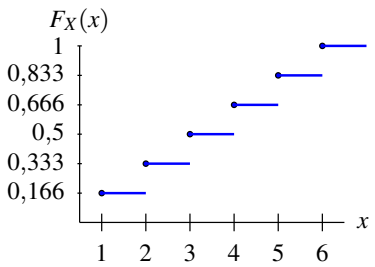
- Definición

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

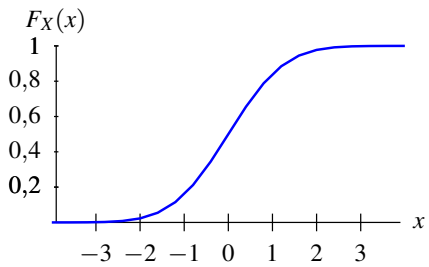
- Interpretación frecuencial (probabilística)

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_x}{n}$$

n : número de realizaciones de la variable aleatoria X
n_x : número de resultados en las n realizaciones con $X \leq x$

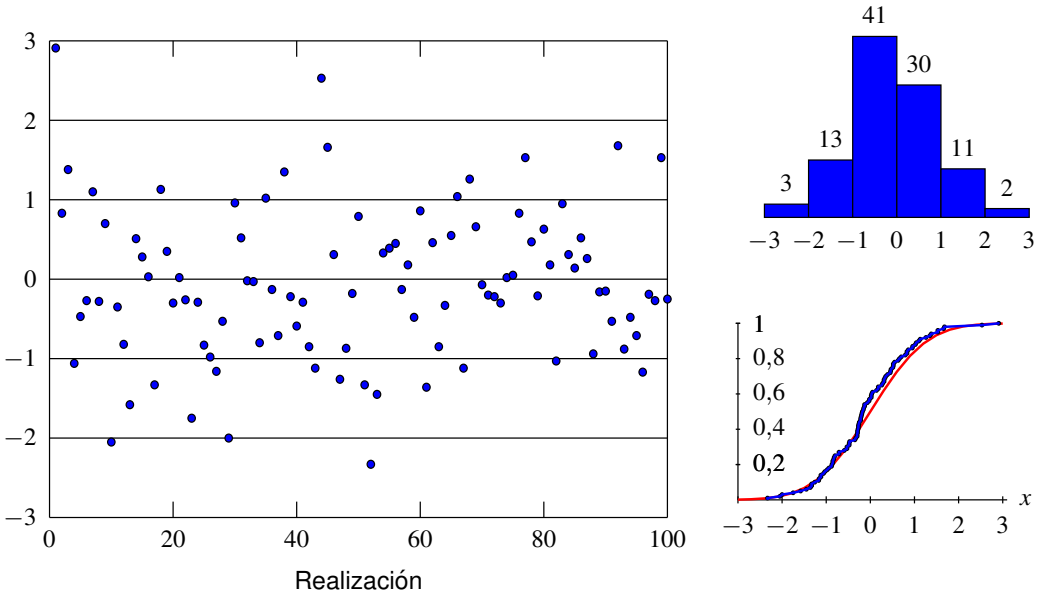


(a) Discreta (Dado)

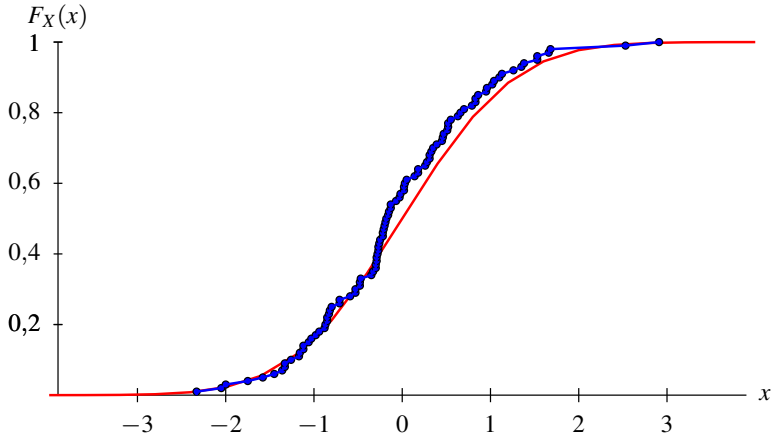


(b) Continua (Gausiana: $\mathcal{N}(0,1)$)

Realizaciones de una variable aleatoria Gausiana

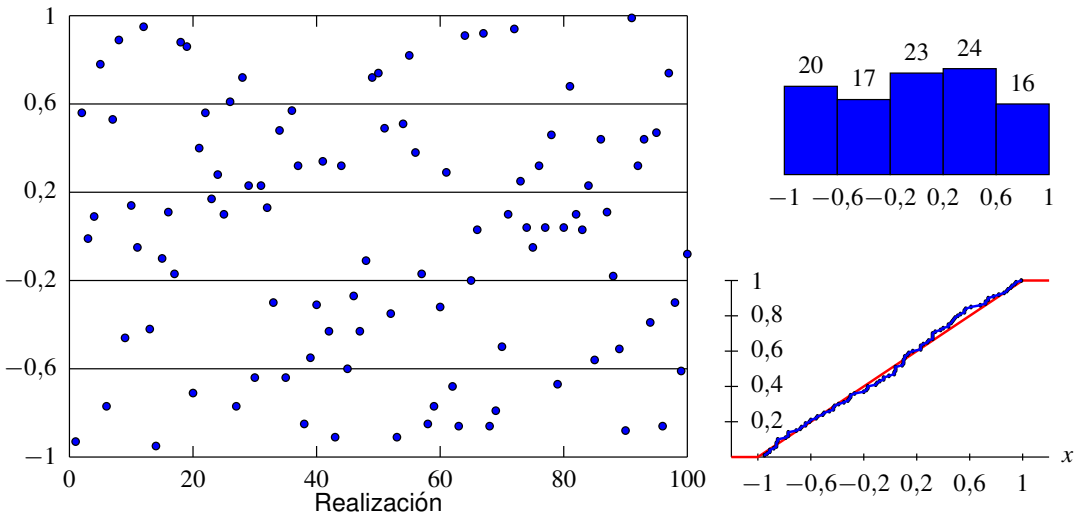


Estima de la función de distribución (Gausiana)

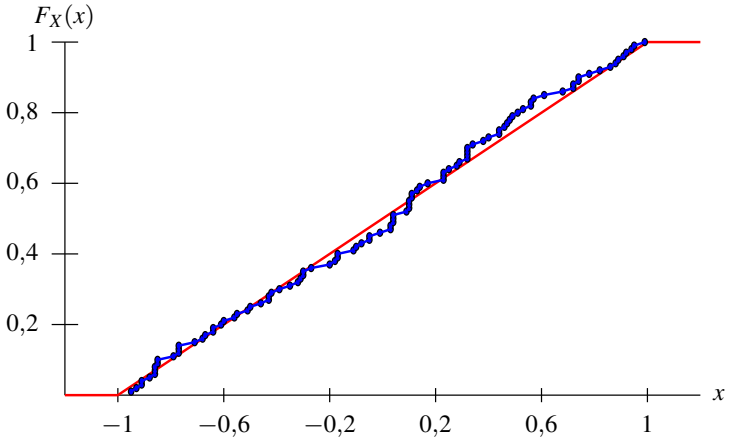


Gausiana: $\mathcal{N}(0,1)$

Realizaciones de una variable aleatoria uniforme



Estima de la función de distribución (Uniforme)



Uniforme: $\mathcal{U}(-1,1)$

Propiedades de la función de distribución

1. $0 \leq F_X(x) \leq 1$
2. $x_1 < x_2 \rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ ($F_X(x)$ es no decreciente)
3. $F_X(-\infty) = 0$ y $F_X(\infty) = 1$ ($\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0, \lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$)
4. $F_X(x^+) = F_X(x)$ ($F_X(x)$ es continua por la derecha)
5. $F_X(b) - F_X(a) = P(a < X \leq b)$

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= F_X(b) - F_X(a^-) \\ P(a < X < b) &= F_X(b^-) - F_X(a) \\ P(a \leq X < b) &= F_X(b^-) - F_X(a^-) \end{aligned}$$

6. $P(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-)$
7. $P(X > x) = 1 - F_X(x)$

Función densidad de probabilidad

- Definición

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

  - V.a. discreta: puntos de masa $p_i = P(X = x_i)$
  - Notación v.a. discreta: $p_X(x_i) = p_i$
- Interpretación frecuencial (probabilística)

$$f_X(x) = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{P(x \leq X \leq x + \Delta_x)}{\Delta_x}$$

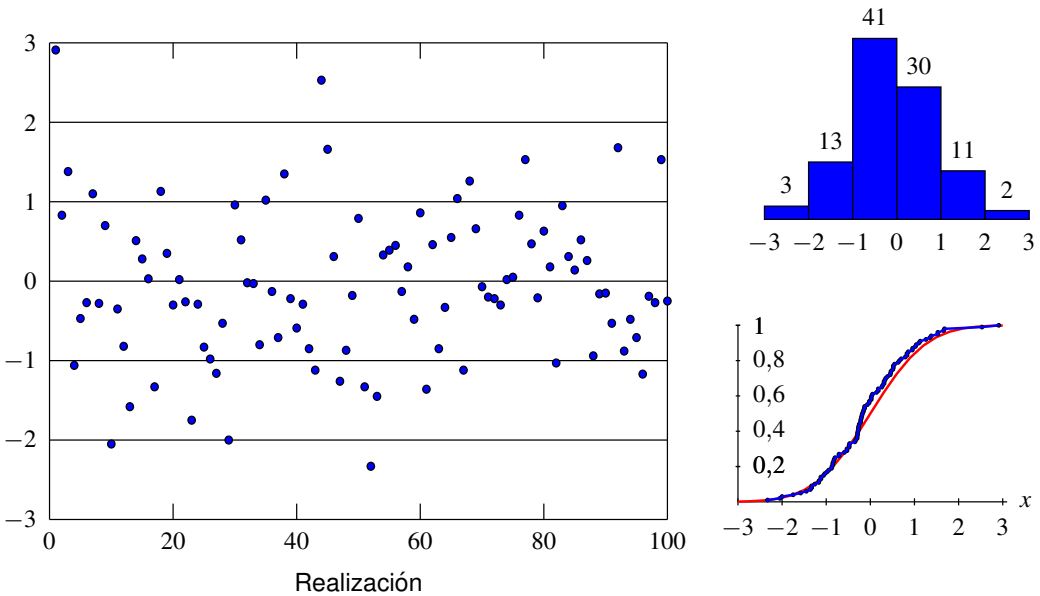
$$f_X(x) = \lim_{\Delta_x \to 0} \left\{ \frac{1}{\Delta_x} \lim_{n\to\infty} \frac{n_x}{n} \right\}$$

n : número de realizaciones de la variable aleatoria X
n_x : número de resultados en las n realizaciones con $x \leq X \leq x + \Delta_x$

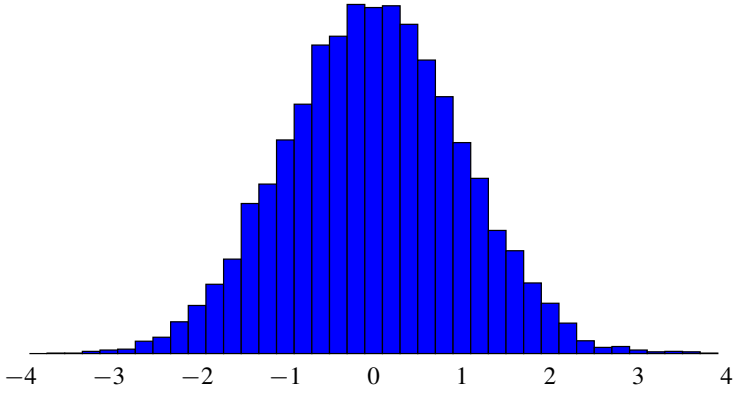
Interpretación de la función densidad de probabilidad

- La f.d.p. indica cómo se distribuyen los valores que toma una variable aleatoria
  - Rangos donde $f_X(x)$ toma valores elevados indican una probabilidad alta de que la variable aleatoria tome valores en ese rango
  - Permite el cálculo de probabilidades sobre los posibles valores de una variable aleatoria
- Una f.d.p. se puede interpretar como un histograma llevado al límite
- A continuación se muestran varios ejemplos
  - Variable aleatoria uniforme
  - Variable aleatoria gausiana

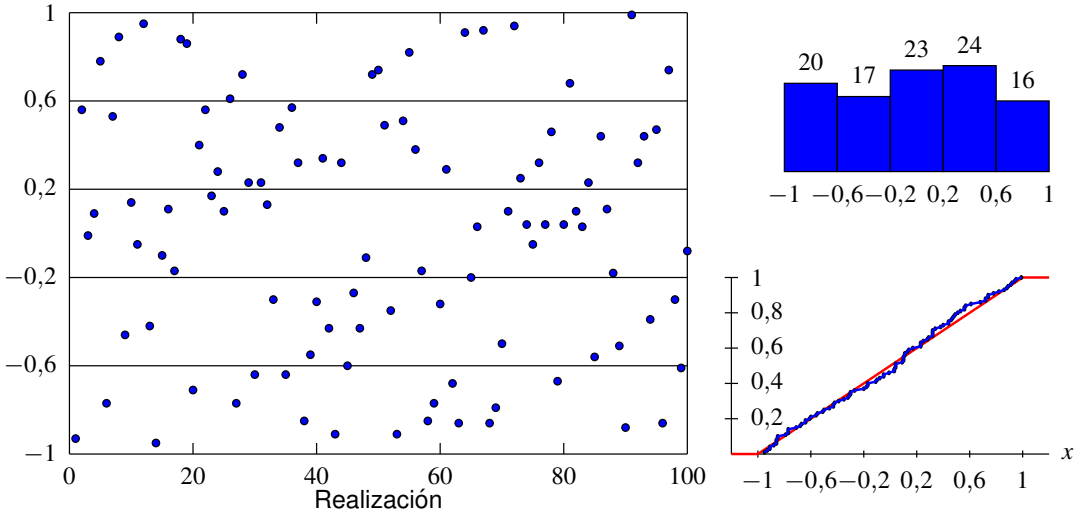
Realizaciones de una variable aleatoria Gausiana



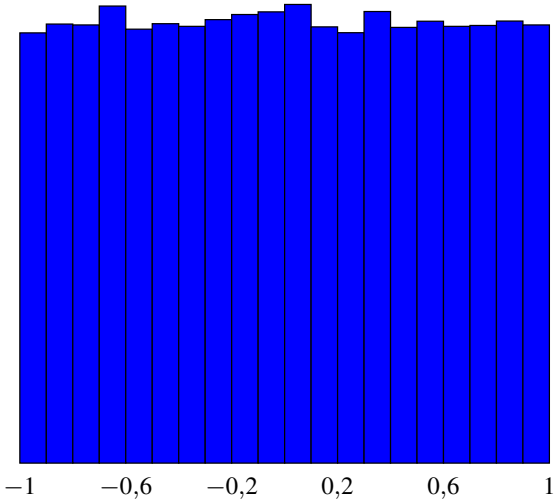
Histograma de 10000 realizaciones de una variable aleatoria Gausiana



Realizaciones de una variable aleatoria Uniforme



Histograma de 10000 realizaciones de una variable aleatoria Uniforme



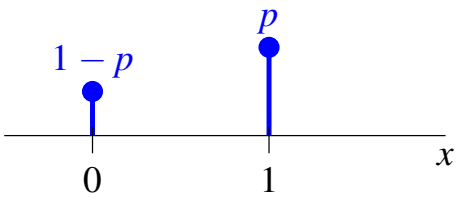
Propiedades de $f_X(x)$

1. $f_X(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1$
3. $\int_{a^+}^{b^+} f_X(x)\, dx = P(a < X \leq b)$
4. En general, $P(X \in A) = \int_A f_X(x)\, dx$
5. $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x^+} f_X(u)\, du$

Variable aleatoria de Bernoulli

- Variable aleatoria discreta con Rango$_X = \{0, 1\}$
- Parámetro: $p = P(X = 1)$

$$f_X(x) = \begin{cases} 1-p, & x = 0 \\ p, & x = 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$



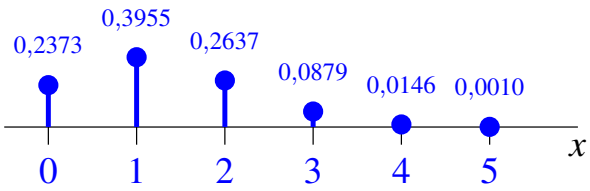
- Ejemplos de aplicación en comunicaciones
  - Generador de datos binario
  - Modelo de errores

Variable aleatoria Binomial

- Número de 1's en n experimentos de Bernoulli (indep.)
  - Parámetros: n, p
    - n: número de experimentos de Bernouilli
    - p: probabilidad de "1" en cada experimento
- Rango$_X = \{0, 1, \ldots, n\}$

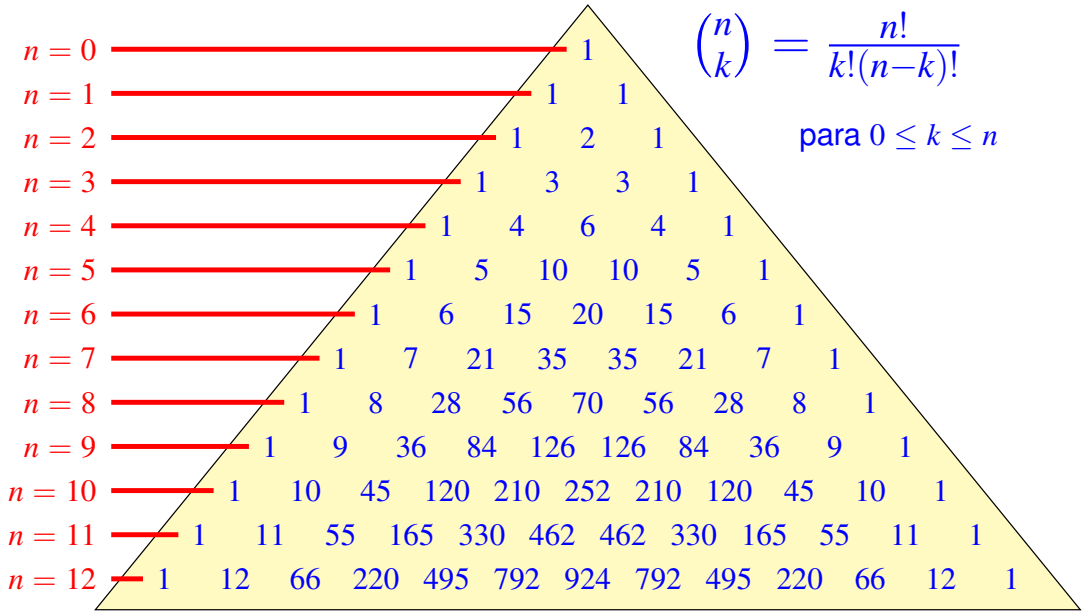
$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, & 0 \le x \le n \text{ y } x \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejemplo: $n = 5$, $p = 0{,}25$



- Ejemplo de aplicación en comunicaciones
  - Número de bits recibidos con error en un bloque de n bits

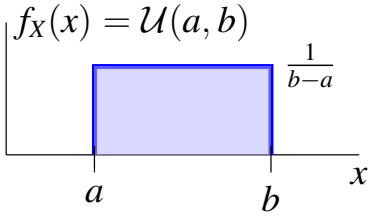
Coeficientes Binomiales - Triángulo de Pascal



Variable aleatoria uniforme

- Variable aleatoria continua de parámetros a y b
  - Notación: $\mathcal{U}(a,b)$
  - Dominio: $\mathcal{D}_X = (a,b)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

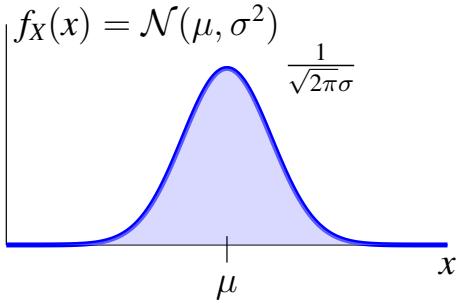


- Ejemplo aplicación en comunicaciones
  - Fase aleatoria en una sinusoide: v.a. uniforme entre 0 y 2π

Variable aleatoria gausiana (normal)

- Parámetros: media (μ), y varianza (σ^2)
  - Notación: $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
  - Dominio: $\mathcal{D}_X = \boldsymbol{R}$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



- Ejemplo de aplicación en comunicaciones
  - Modelado del ruido térmico

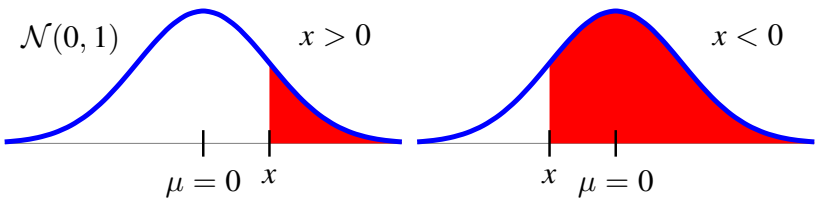
Función $Q(x)$

- Función tabulada calculada numéricamente relacionada con la integral de una distribución gausiana
- Definición: probabilidad de que una variable aleatoria gausiana de media nula y varianza unidad tome valores mayores que su argumento

$$\text{Si } X \sim \mathcal{N}(0,1) \rightarrow f_X(x) = \mathcal{N}(0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \rightarrow Q(x) = P(X > x)$$

$$Q(x) = \int_x^{+\infty} f_X(z)\, dz = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$$

- Interpretación gráfica
  - Sólo se tabula para $x \geq 0$
  - Para $x < 0$, dada la simetría de $f_X(x)$: $Q(-x) = 1 - Q(x)$



Función $Q(x)$ - Propiedades

- Relación con la función de distribución de una v.a. gausiana (con $\mu = 0, \sigma^2 = 1$)

$$X \sim \mathcal{N}(0,1) \rightarrow F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$$

  - Función $Q(x)$

$$Q(x) = 1 - F_X(x)$$

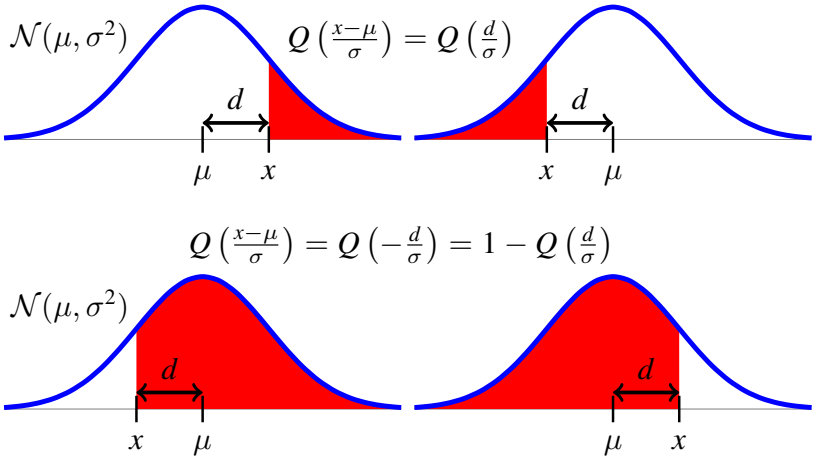
- Algunas propiedades de la función $Q(x)$
  - $Q(-x) = 1 - Q(x)$
  - $Q(0) = \frac{1}{2}$
  - $Q(\infty) = 0$
  - $Q(-\infty) = 1$

Integrales sobre distribuciones gausianas $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

- Si la distribución gausiana tiene media μ y varianza σ^2

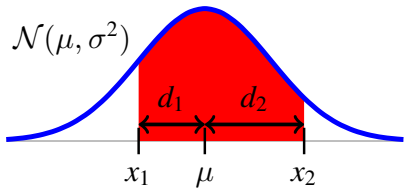
$$P(X > x) = Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

- Interpretación gráfica (considerando definición y simetría)

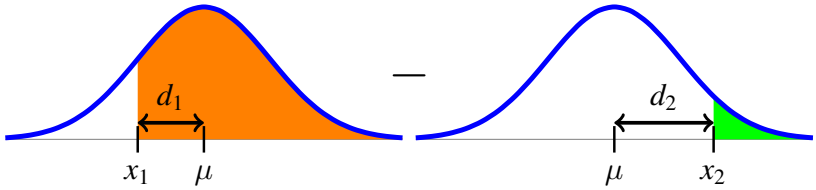


Integrales sobre $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ en intervalos

- En general se pueden escribir como sumas o diferencias de diferentes términos involucrando integrales desde un punto a $\pm\infty$, que ya hemos visto como se obtienen utilizando la función $Q(x)$
- Un ejemplo ilustrativo



$$\int_{x_1}^{x_2} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \int_{x_1}^{\infty} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) - \int_{x_2}^{\infty} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \left[1 - Q\left(\tfrac{d_1}{\sigma}\right)\right] - \left[Q\left(\tfrac{d_2}{\sigma}\right)\right]$$



Funciones de una variable aleatoria

- Una función $Y = g(X)$ de una v. a. es una variable aleatoria.
- Función de distribución

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y)$$

$$F_Y(y) = P(x \in B_X^g(y)),\ B_X^g(y) = \{x \in \boldsymbol{R} : g(x) \leq y\}$$

- Función densidad de probabilidad

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{N_r} \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

  - $\{x_i\}$: raíces de la ecuación $y = g(x)$
  - $g'(x)$: derivada de la función $g(x)$
  - Condiciones: número finito de raíces, N_r y $g(x_i) \neq 0\ \forall x_i$

Momentos estadísticos

- Valor esperado (media, o esperanza matemática)

$$m_X = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx$$

- Valor esperado de una función de X $(g(X))$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx$$

- Momento de orden n

$$m_X^n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n\, f_X(x)\, dx$$

- Varianza

$$\sigma_X^2 = E\left[(X - m_X)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2\, f_X(x)\, dx$$

NOTA: $\sigma_X^2 = E\left[(x - m_X)^2\right] = E[X^2] - (E[X])^2 = E[X^2] - (m_X)^2$

Propiedades de los momentos

Considerando las variables aleatorias X e Y, y una constante c

- $E[X + Y] = E[X] + E[Y] = m_X + m_Y$ (Operador lineal)
- $E[c] = c$
- $E[c\,X] = c\,E[X]$
- $E[X + c] = E[X] + c$
- $\mathrm{Var}(c) = 0$
- $\mathrm{Var}(c\,X) = c^2\,\mathrm{Var}(X)$
- $\mathrm{Var}(X + c) = \mathrm{Var}(X)$

Variables aleatorias multidimensionales

- Se puede trabajar de forma conjunta con dos variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio muestral Ω
- Modelado probabilístico conjunto
  - Función de distribución conjunta

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

  - Función densidad de probabilidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y)$$

Propiedades de $F_{X,Y}(x,y)$ y $f_{X,Y}(x,y)$

- $F_X(x) = F_{X,Y}(x,\infty)$
- $F_Y(y) = F_{X,Y}(\infty,y)$
- $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy$
- $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx$
- $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy = 1$
- $P((X,Y) \in A) = \int\int_{(x,y)\in A} f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$
- $F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)\, du\, dv$

Funciones de variables aleatorias

- Funciones de variables aleatorias: $Z = g(X,Y),\ W = h(X,Y)$

$$\begin{cases} Z = g(X,Y) \\ W = h(X,Y) \end{cases}$$

- Función de distribución conjunta, $F_{Z,W}(z,w)$

$$F_{Z,W}(z,w) = P(Z \leq z, W \leq w) = P\left((x,y) \in B^{g,h}_{X,Y}(z,w)\right)$$

$$B^{g,h}_{X,Y}(z,w) = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 : g(x,y) \leq z, h(x,y) \leq w\}$$

- Función densidad de probabilidad conjunta

$$f_{Z,W}(z,w) = \sum_i \frac{f_{X,Y}(x_i,y_i)}{|\det \boldsymbol{J}(x_i,y_i)|}, \quad \boldsymbol{J}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial z(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial z(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial w(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial w(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix}$$

  - $\{x_i, y_i\}$: raíces del sistema de ecuaciones $z = g(x,y), w = h(x,y)$
  - Número finito de raíces y determinante no nulo para todas ellas

Función densidad de probabilidad condicional

- Significado de una probabilidad condicional
  - El conocimiento del valor de una variable puede modificar la distribución de probabilidades (a priori) de la otra

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}, & f_X(x) \neq 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

  - En general, puede ocurrir que $f_{Y|X}(y|x) \neq f_Y(y)$
- Definición de independencia estadística:

$$f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y)$$

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$$

  - Implicación: para variables aleatorias independientes

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$$

Momentos estadísticos

- Valor esperado de una función $g(X,Y)$

$$E[g(X,Y)] = \int_{\infty}^{\infty} \int_{\infty}^{\infty} g(x,y)\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$$

- Casos particulares
  - Correlación: $g(X,Y) = X\ Y$
  - Covarianza: $g(X,Y) = (X - m_X)\ \ (Y - m_Y)$
- Implicación de independencia: si $g(X,Y) = g_1(X)\ g_2(Y)$

$$E\left[g_1(X)\ g_2(Y)\right] = E\left[g_1(X)\right]\ \ E\left[g_2(Y)\right]$$

NOTA: Sólo bajo independencia entre X e Y !!!!

Incorrelación

- Coeficiente de correlación

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\ \sigma_Y}, \quad 0 \leq |\rho_{X,Y}| \leq 1$$

  - Si $\rho_{X,Y} = 0$: v.a.'s **incorreladas**
    - ⋆ Independencia implica incorrelación
    - ⋆ Incorrelación no implica independencia
  - Si $\rho_{X,Y} = \pm 1$: relación lineal $Y = aX + b$

$$\rho_{X,Y} = +1 \rightarrow a > 0; \qquad \rho_{X,Y} = -1 \rightarrow a < 0$$

- Incorrelación sólo implica independencia para variables aleatorias conjuntamente gausianas
  - NOTA: Salvo este caso, en general, incorrelación no implica independencia !!!

Variables aleatorias conjuntamente gausianas

- Dos variables, X, Y: caracterizadas por una f.d.p. conjunta gausiana
  - Gaussiana 2-D

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}+\frac{(y-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}-\frac{\rho(x-\mu_x)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right)}$$

- Para n variables aleatorias $\mathbf{X} = X_1, X_2, \ldots, X_n$
  - Variables con una f.d.p. conjunta gaussiana n-D

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\boldsymbol{C})}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{C}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T}$$

    - ⋆ Vector de medias: $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n]^T$
    - ⋆ Matriz de covarianzas: $\boldsymbol{C}$, dada por

$$C_{i,j} = \text{Cov}(X_i, X_j) = \rho_{i,j}\,\sigma_i\,\sigma_j$$

Propiedades de v.a.'s conjuntamente gausianas

- Completamente caracterizadas por $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{C}$ (estadísticos de 2º orden)
- Si n variables aleatorias son conjuntamente gausianas, cualquier subconjunto también está distribuido de forma conjuntamente gausiana.
  - En particular, todas las variables individuales son gausianas
- Cualquier subconjunto de v.a. conjuntamente gausianas, condicionadas a otro subconjunto de las mismas v.a. conjuntamente gausianas originales, tiene una distribución conjuntamente gausiana
  - Los parámetros de la Gausiana del subconjunto pueden variar
- Cualquier conjunto de combinaciones lineales de $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es conjuntamente gausiano.
  - En particular, individualmente cualquier combinación lineal Y_i es gausiana
- Dos variables incorreladas son independientes
  - Para variables conjuntamente gausianas, independencia es equivalente a incorrelación
- Si las variables están incorreladas, $\rho_{i,j} = 0\ \forall i \neq j$
  - $\boldsymbol{C}$ es una matriz diagonal

Suma de variables aleatorias

- **Ley de los grandes números (débil)**: Si $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ están *incorreladas* y todas tienen la misma media m_X y varianza $\sigma_X^2 < \infty$, independientemente de su distribución, para cualquier $\varepsilon > 0$,

$$\text{si } Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \lim_{n\to\infty} P(|Y - m_X| > \varepsilon) = 0$$

- **Teorema del límite central**: Si $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ son *independientes* con medias $m_1, m_2, \ldots, m_n$, y varianzas $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$, entonces la distribución de

$$Y = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - m_i}{\sigma_i}$$

converge a una distribución gausiana de media 0 y varianza 1

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \equiv \mathcal{N}(0,1)$$

Suma de variables aleatorias (II)

- Caso particular: variables *independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.)*, es decir, que todas tengan la misma distribución con la misma media m y la misma varianza σ^2; el promedio

$$Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

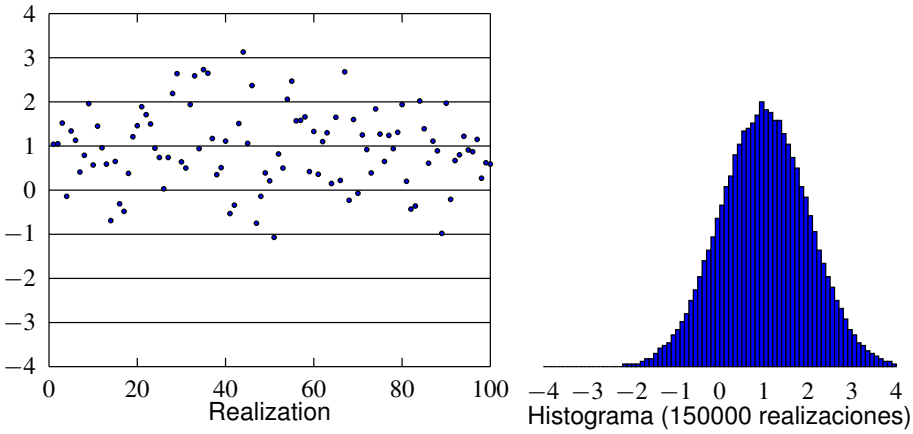
converge a una distribución

$$Y \sim \mathcal{N}(m, \frac{\sigma^2}{n})$$

  - Esto es así aunque las distribución de cada X_i no sea gausiana
- Recordatorio: condiciones a satisfacer
  - Ley de los grandes números (débil): incorrelación
  - Teorema del límite central: independencia

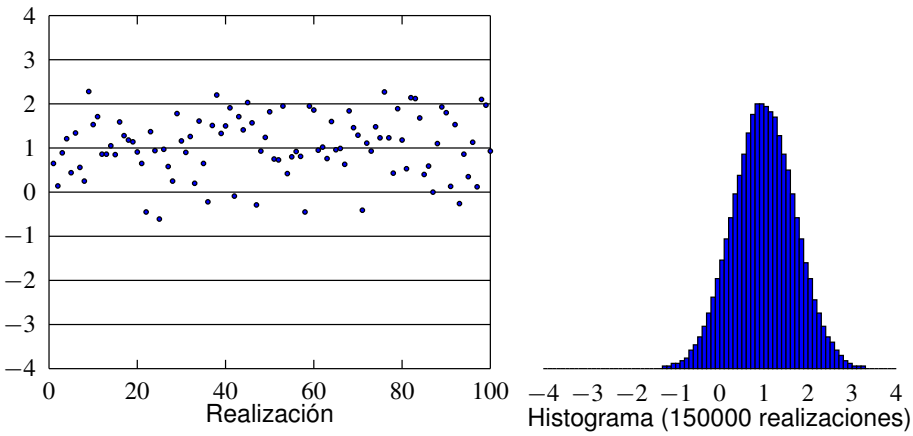
Realizaciones 1 variable aleatoria gausiana

- Variable aleatoria gausiana: media $m_X = 1$, varianza $\sigma_X^2 = 1$



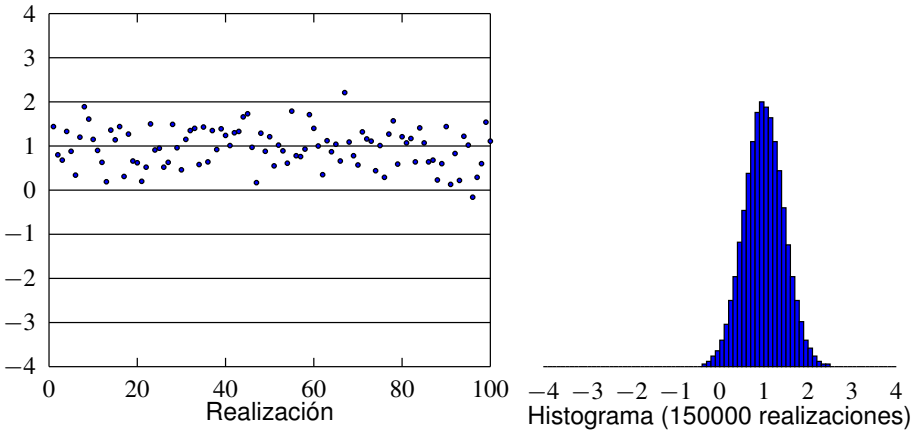
Promedio de 2 variables aleatorias gausianas (realizaciones)

- Variables aleatorias gausianas: media $m_X = 1$, varianza $\sigma_X^2 = 1$



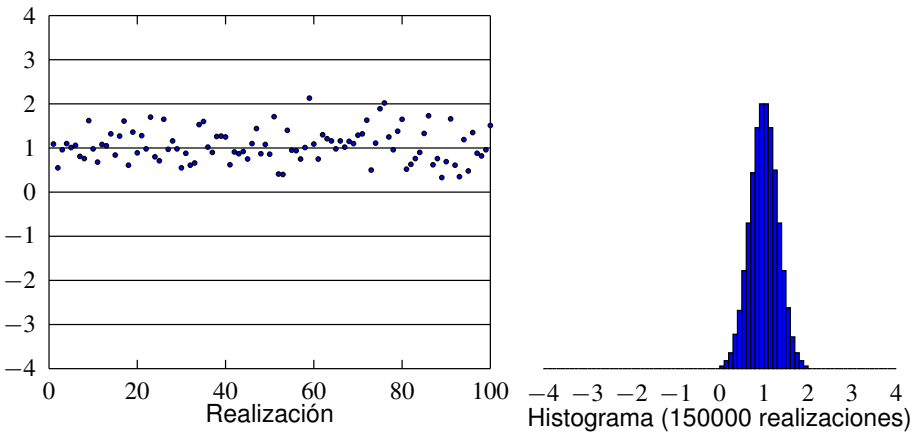
Promedio de 5 v. a. gausianas (realizaciones)

- Variables aleatorias gausianas: media $m_X = 1$, varianza $\sigma_X^2 = 1$



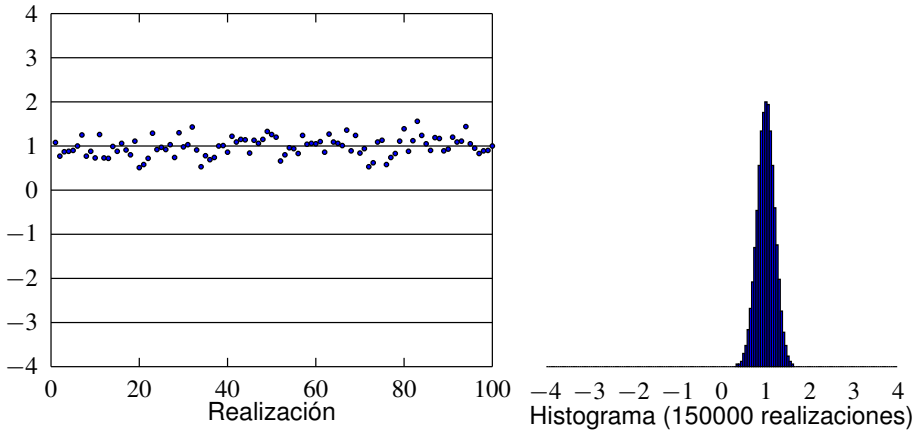
Promedio de 10 v. a. gausianas (realizaciones)

- Variables aleatorias gausianas: media $m_X = 1$, varianza $\sigma_X^2 = 1$



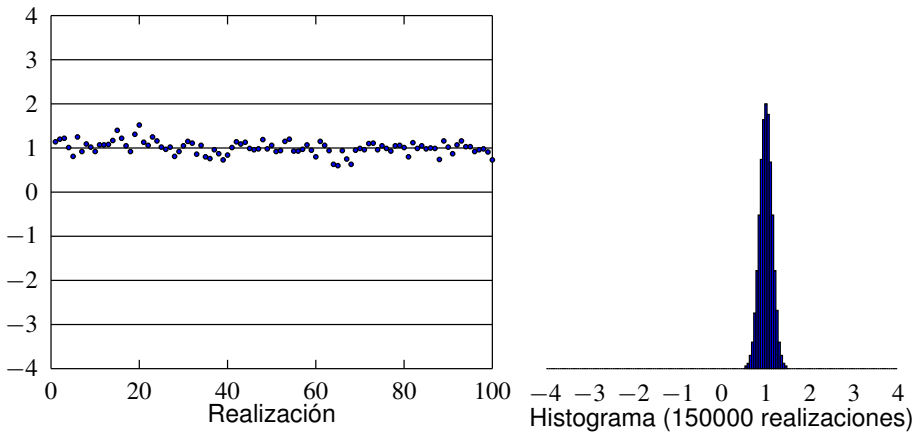
Promedio de 25 v. a. gausianas (realizaciones)

- Variables aleatorias gausianas: media $m_X = 1$, varianza $\sigma_X^2 = 1$



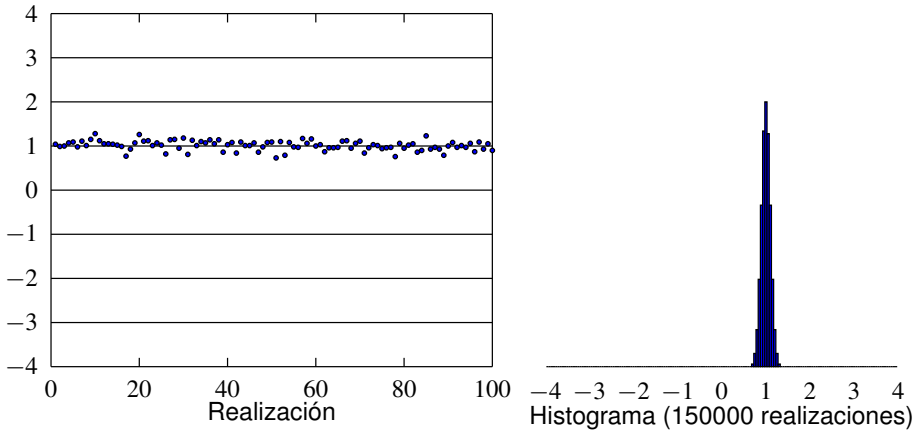
Promedio de 50 v. a. gausianas (realizaciones)

- Variables aleatorias gausianas: media $m_X = 1$, varianza $\sigma_X^2 = 1$



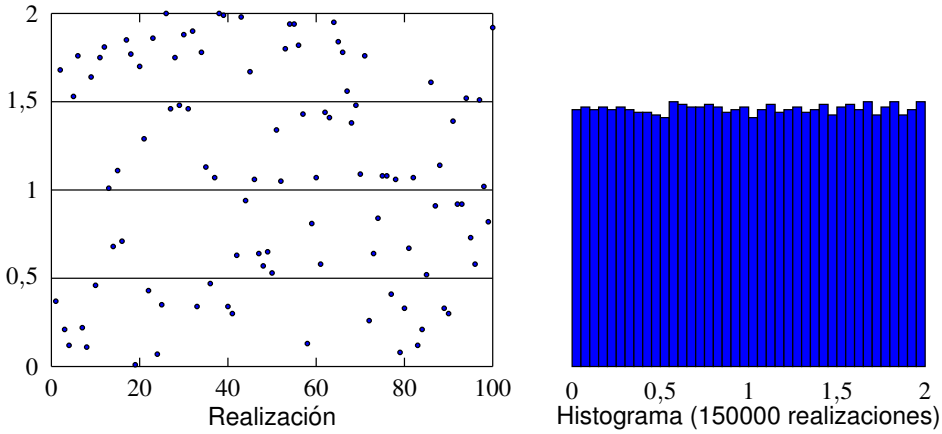
Promedio de 100 v. a. gausianas (realizaciones)

- Variables aleatorias gausianas: media $m_X = 1$, varianza $\sigma_X^2 = 1$



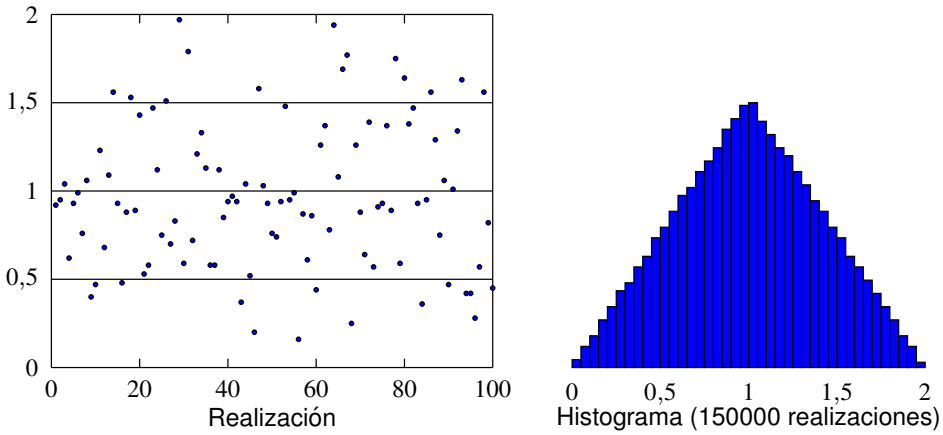
Realizaciones de 1 variable aleatoria uniforme

- Variable aleatoria uniforme entre 0 y 2



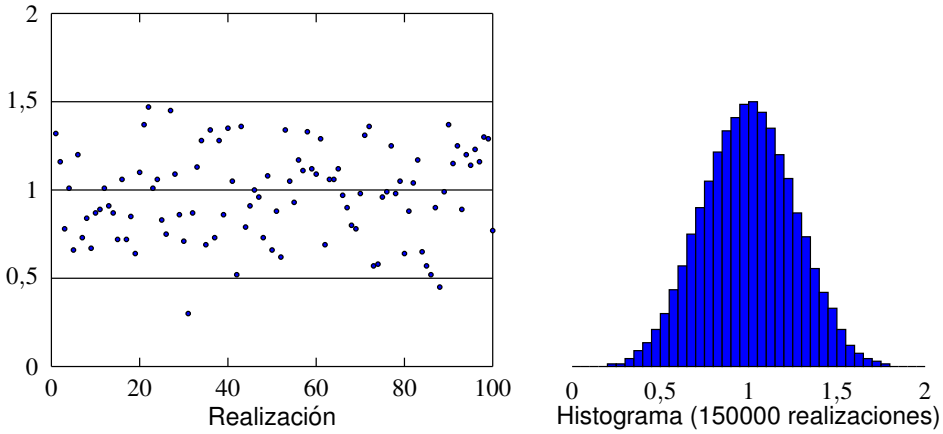
Promedio de 2 variables aleatorias uniformes (realizaciones)

- Variables aleatorias uniformes entre 0 y 2.



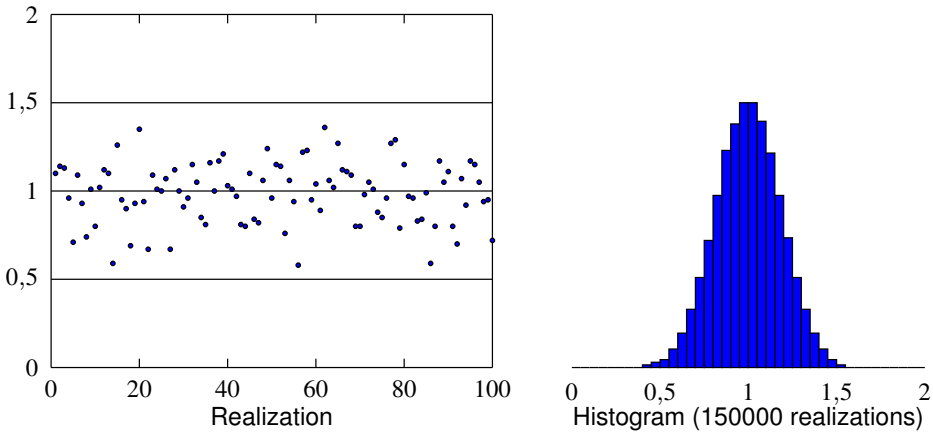
Promedio de 5 v. a. uniformes (realizaciones)

- Variables aleatorias uniformes entre 0 y 2.



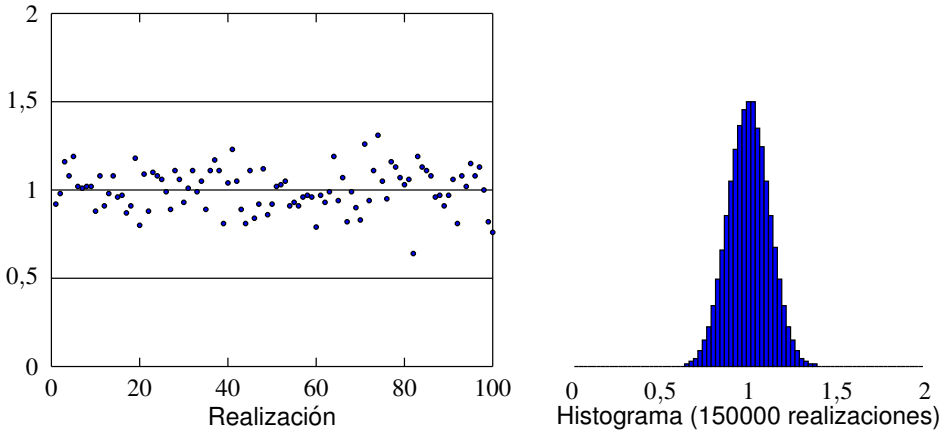
Promedio de 10 v. a. uniformes (realizaciones)

- Variables aleatorias uniformes entre 0 y 2.



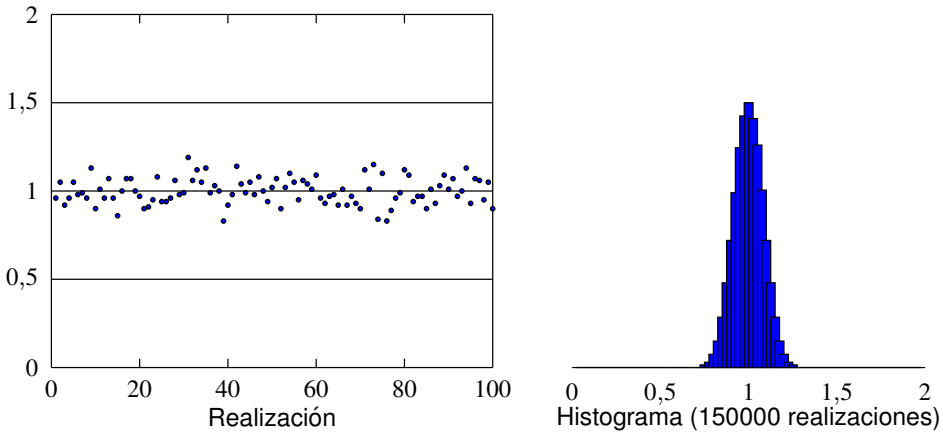
Promedio de 25 v. a. uniformes (realizaciones)

- Variables aleatorias uniformes entre 0 y 2.



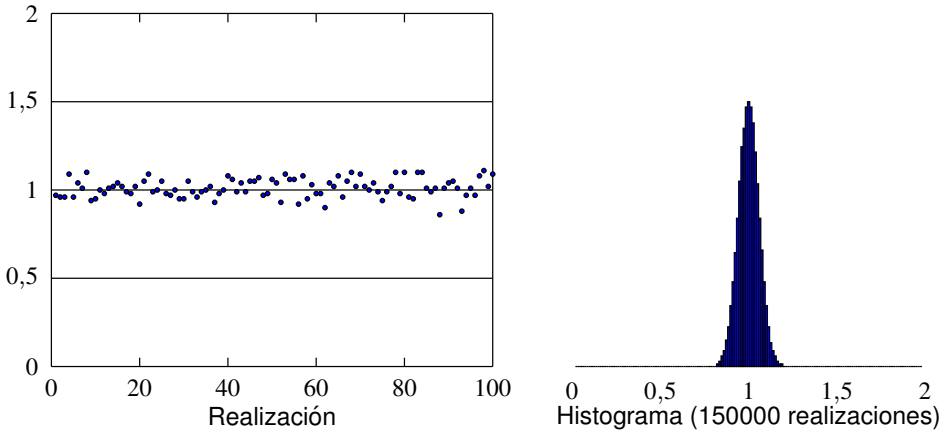
Promedio de 50 v. a. uniformes (realizaciones)

- Variables aleatorias uniformes entre 0 y 2.



Promedio de 100 v. a. uniformes (realizaciones)

- Variables aleatorias uniformes entre 0 y 2.



Procesos aleatorios (reales)

- Extensión de v.a. incluyendo dependencia temporal
  - Variable aleatoria

$$\lambda \in \Omega \rightarrow X(\lambda)$$

  - Proceso aleatorio (en tiempo continuo o en tiempo discreto)

$$\lambda \in \Omega \rightarrow X(t,\lambda) \text{ o } X[n,\lambda]$$

- Particularizaciones
  - $X(t,\lambda_i)$ o $X[n,\lambda_i]$: señal temporal asociada a λ_i $x_i(t)$ o $x_i[n]$
  - $X(t_i,\lambda)$ o $X[n_i,\lambda]$: variable aleatoria ($X(\lambda)$)
  - $X(t_i,\lambda_j)$ o $X[n_i,\lambda_i]$: realización individual de una v.a.
- Notación: $X(t)$ o $X[n]$
- Interpretación: conjunto indexado de variables aleatorias
  - Índice continuo ($t \in \boldsymbol{R}$): Proceso aleatorio en tiempo continuo
  - Índice discreto ($n \in \mathbb{Z}$): Proceso aleatorio en tiempo discreto

Proceso aleatorio $X(t,\lambda) \equiv X(t)$ - Ejemplo I

- Experimento aleatorio: lanzamiento de un dado
  - 6 posibles resultados

$$\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6\}$$

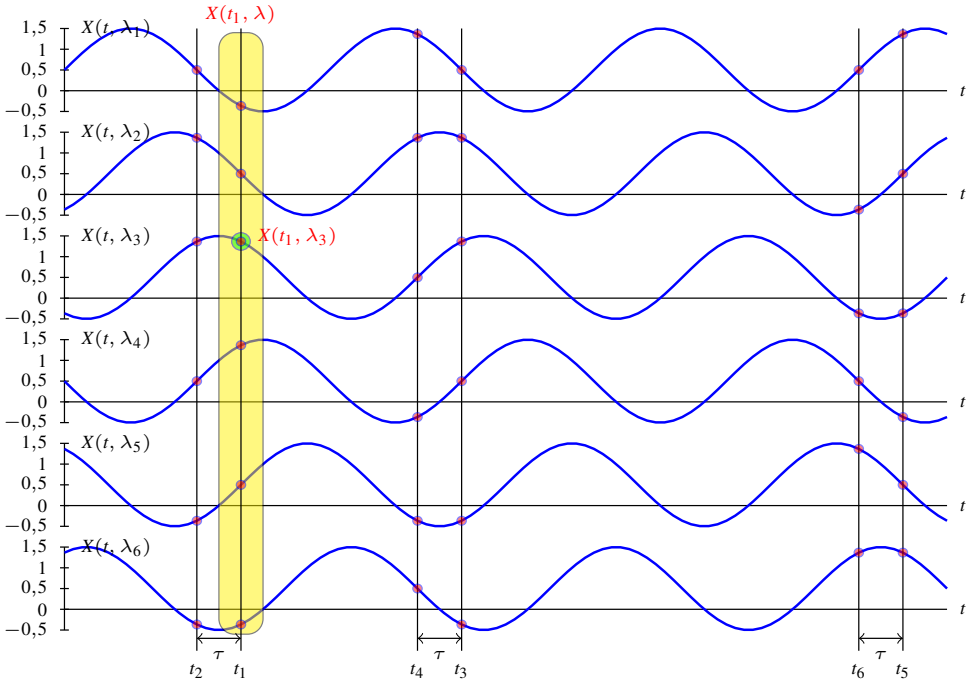
    - ⋆ λ_i: hay i puntos en la cara superior del dado
- Variable aleatoria
  - Asignación habitual: $\lambda_i = i$
  - Dominio: $\mathcal{D}_X = \{1,2,3,4,5,6\}$
- Proceso aleatorio
  - Una señal para cada posible resultado del experimento

$$X(t,\lambda_i) = \frac{1}{2} + \text{sen}(\omega_0 t - \theta_i)$$

$$\text{con } \theta_i = (i-1)\frac{2\pi}{6}$$

$$\text{para } i \in \{1,2,3,4,5,6\}$$

Proceso aleatorio $X(t,\lambda) \equiv X(t)$ - Ejemplo I



Proceso aleatorio $X(t,\lambda) \equiv X(t)$ - Ejemplo II

- Experimento aleatorio: lanzamiento de un dado
  - 6 posibles resultados

$$\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6\}$$

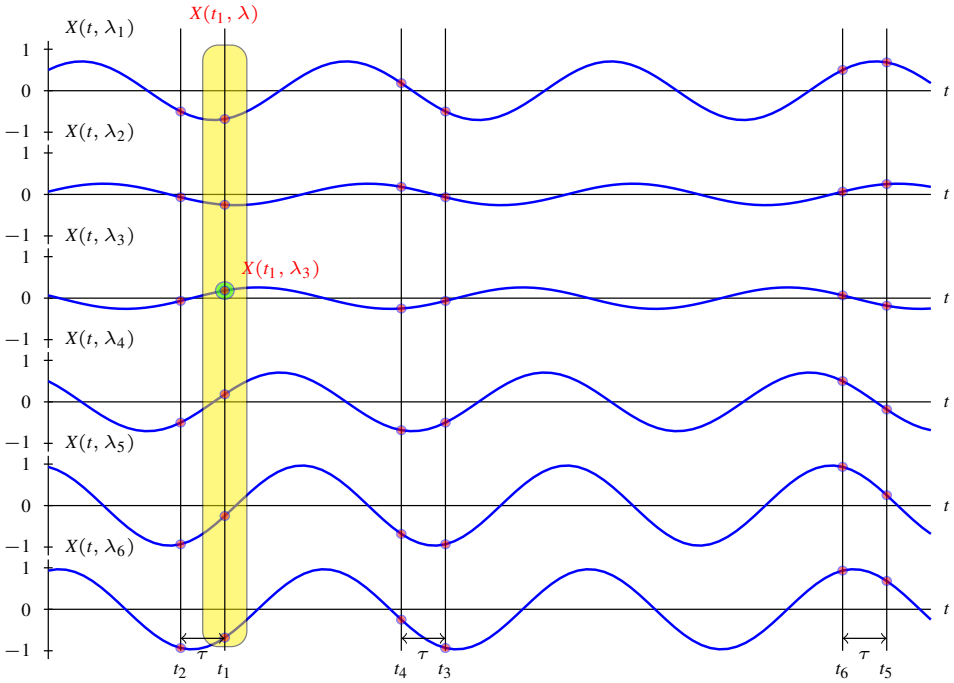
- Proceso aleatorio
  - Una señal para cada posible resultado del experimento

$$X(t,\lambda_i) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(\omega_0 t - \theta_i) + \frac{1}{2}\cos(\omega_0 t)$$

$$\text{con } \theta_i = (i-1)\frac{2\pi}{6}$$

$$\text{para } i \in \{1,2,3,4,5,6\}$$

Proceso aleatorio $X(t,\lambda) \equiv X(t)$ - Ejemplo II



Descripción de un proceso aleatorio

- Descripción analítica

$$X(t) = f(t, \boldsymbol{\theta})$$

  $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n\}$: vector de n variables aleatorias
  - Ecuación $f(t, \boldsymbol{\theta})$
  - Descripción estadística de $\boldsymbol{\theta}$

$$f_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x}) = f_{\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

- Descripción estadística
  - Completa: $\forall\ (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \boldsymbol{R}^n$, $\forall\ n$

$$f_{X(t_1),X(t_2),\ldots,X(t_n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

  - De orden M: $\forall\ n \leq M$, $\forall\ (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \boldsymbol{R}^n$

$$f_{X(t_1),X(t_2),\ldots,X(t_n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Esperanzas de los procesos (promedios estadísticos)

- Media de un proceso aleatorio

$$m_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X(t)}(x) dx$$

- Función de autocorrelación de un proceso aleatorio

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)\ X(t_2)]$$

$$R_X(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1\ x_2\, f_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2)\ dx_1\ dx_2$$

NOTA: Definición para procesos aleatorios complejos

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)\ X^*(t_2)]$$

$$R_X(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1\ x_2^*\, f_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2)\ dx_1\ dx_2$$

Algunos ejemplos de descripción

- Descripción analítica

$$X(t) = A\ \cos(\omega_0 t) + B\ \text{sen}(\omega_0 t)$$

  - $A \sim \mathcal{N}(0, \sigma_A^2)$
  - $B \sim \mathcal{N}(0, \sigma_B^2)$
  - A y B son variables aleatorias independientes: $f_{A,B}(a, b) = f_A(a) \times f_B(b)$

- Descripción estadística (de orden 2)

$$f_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{(1-\rho^2)}\left(\frac{(x_1-1)^2}{2} + \frac{(x_2+1)^2}{2} - \rho(x_1-1)(x_2+1)\right)}$$

Ejemplos I y II: media y función de autocorrelación

- Ejemplo I
  - Media $\boxed{m_X(t) = \frac{1}{2}}$
  - Función de autocorrelación

$$\boxed{R_X(t_1, t_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(\omega_0(t_1 - t_2))}$$

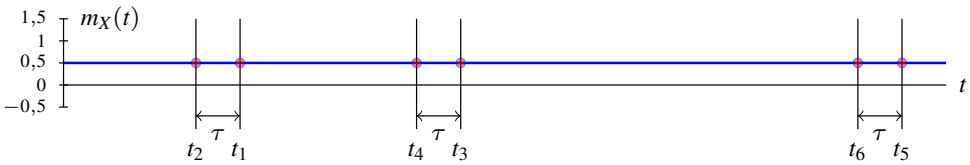
$$\boxed{R_X(t+\tau, t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(\omega_0\tau)}$$

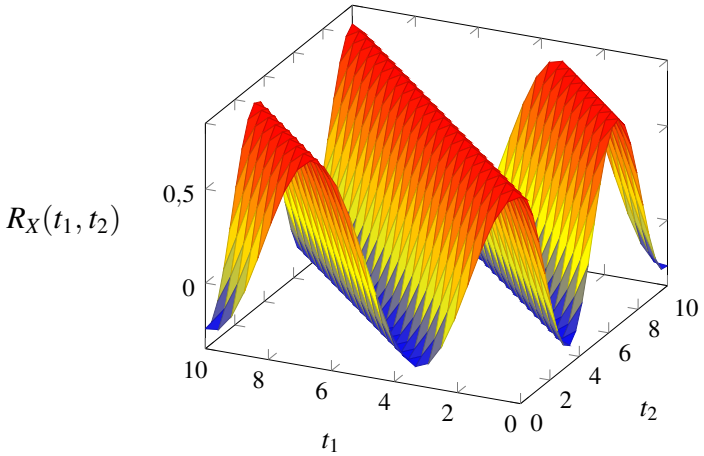
- Ejemplo II
  - Media $\boxed{m_X(t) = \frac{1}{2}\cos(\omega_0 t)}$
  - Función de autocorrelación

$$\boxed{R_X(t_1, t_2) = \frac{1}{4}\cos(\omega_0(t_1 - t_2)) + \frac{1}{4}\cos(\omega_0(t_1 + t_2))}$$

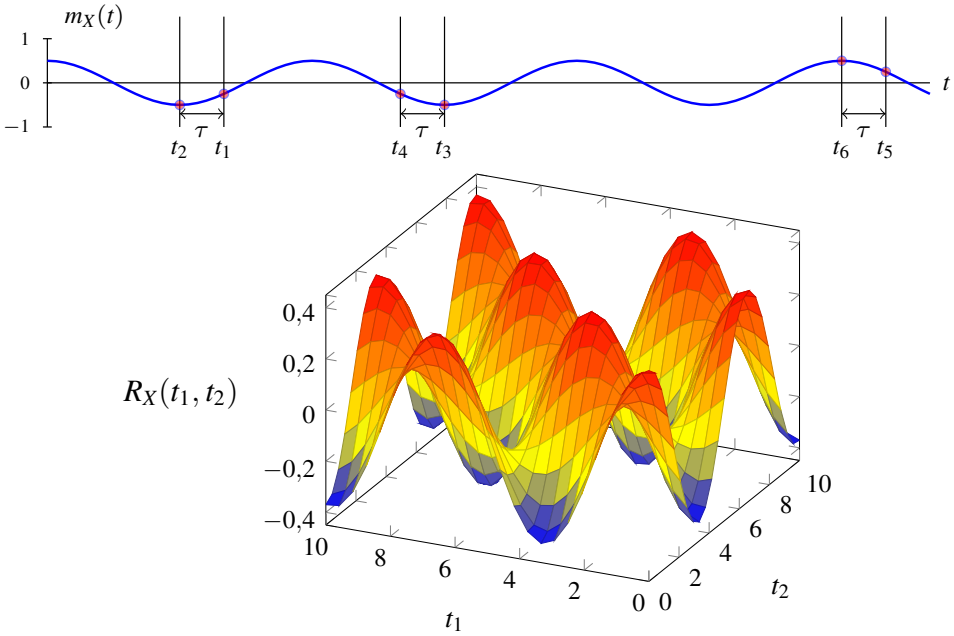
$$\boxed{R_X(t+\tau, t) = \frac{1}{4}\cos(\omega_0\tau) + \frac{1}{4}\cos(\omega_0(2t+\tau))}$$

Media y función de autocorrelación: $m_X(t)$, $R_X(t_1, t_2)$ - Ej. I





Media y función de autocorrelación: $m_X(t)$, $R_X(t_1,t_2)$ - Ej. II



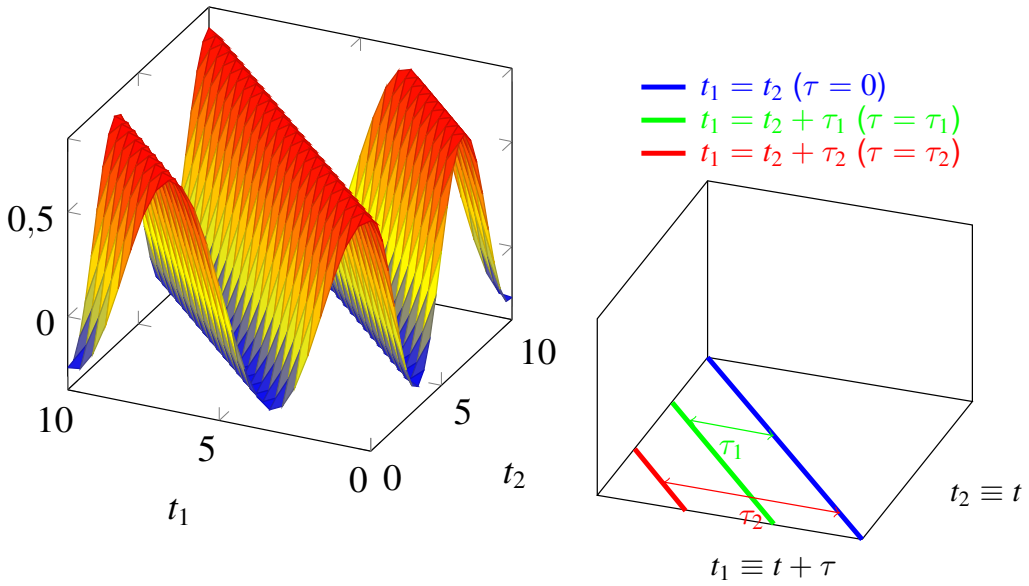
Estacionariedad y cicloestacionariedad

- Estacionariedad en sentido estricto: $\forall\ (t_1,t_2,\ldots,t_n)$, $\forall n$, $\forall \Delta$

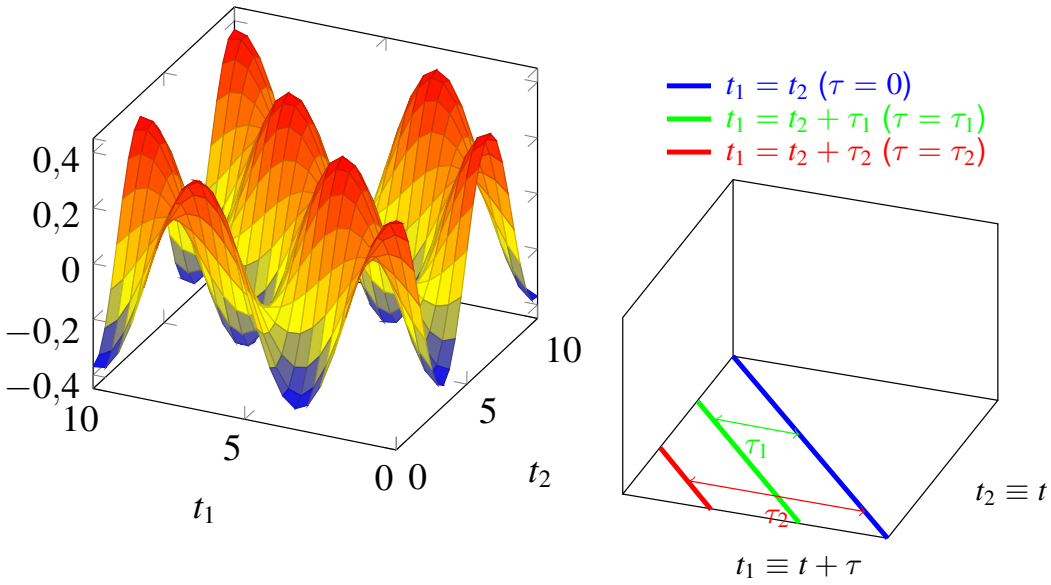
$$f_{X(t_1),X(t_2),\ldots,X(t_n)}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = f_{X(t_1+\Delta),X(t_2+\Delta),\ldots,X(t_n+\Delta)}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

  - Estacionariedad de orden M: para $n \leq M$
- Estacionariedad en sentido amplio
  1. $m_X(t) = m_X$ (no depende de t)
  2. $R_X(t_1,t_2) = R_X(t_1-t_2) = R_X(\tau)$ (definiendo $\tau = t_1 - t_2$)
     También se suele denotar $R_X(t+\tau,t) = R_X(\tau)$
- Cicloestacionariedad
  1. $m_X(t+T_o) = m_X(t)$
  2. $R_X(t+\tau+T_o,t+T_o) = R_X(t+\tau,t)$, para todo t y τ

Función de autocorrelación: $R_X(t_1, t_2)$ - Ej. I

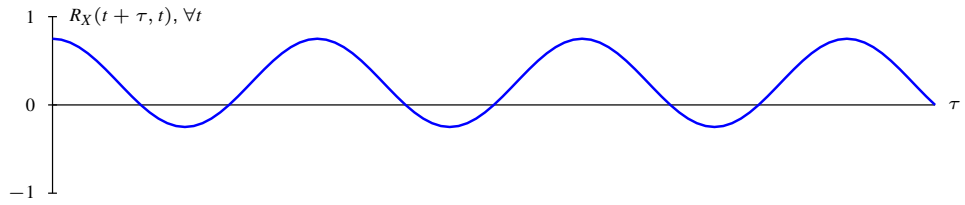


Función de autocorrelación: $R_X(t_1, t_2)$ - Ej. II

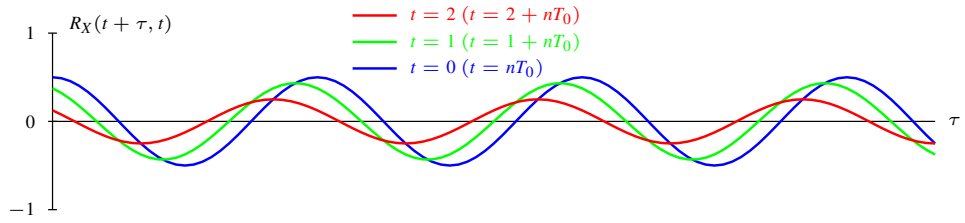


Función de autocorrelación: $R_X(t_1, t_2) \equiv R_X(t+\tau, t)$

- Ejemplo I



- Ejemplo II



Proceso aleatorio $X(t, \lambda) \equiv X(t)$ - Ejemplo III

- Experimento aleatorio: lanzamiento de un dado
  - 6 posibles resultados

$$\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6\}$$

- Proceso aleatorio
  - Una señal para cada posible resultado del experimento

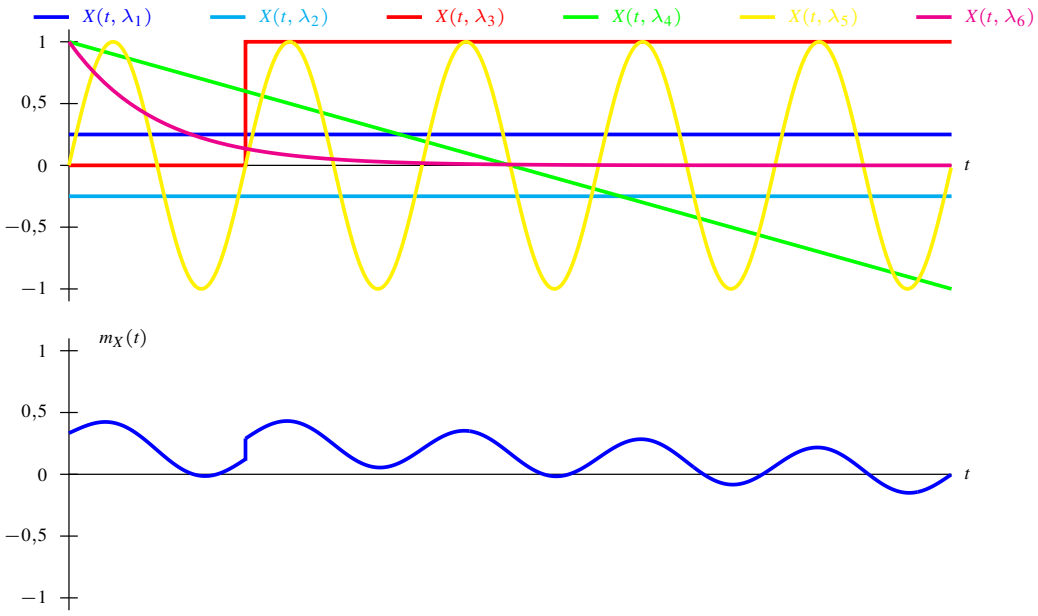
$$X(t, \lambda_1) = \frac{1}{4}, \qquad X(t, \lambda_2) = -\frac{1}{4}$$

$$X(t, \lambda_3) = u(t-2) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \geq 2 \\ 0, & \text{si } t < 2 \end{cases}$$

$$X(t, \lambda_4) = 1 - \frac{t}{5}$$

$$X(t, \lambda_5) = e^{-t}, \qquad X(t, \lambda_6) = \text{sen}(\pi t)$$

Proceso aleatorio $X(t,\lambda) \equiv X(t)$ - Ejemplo III



Autocorrelación de procesos estacionarios

La función de autocorrelación de un proceso estacionario $X(t)$, $R_X(\tau)$, tiene las siguientes propiedades:

- Es una función par

$$R_X(-\tau) = R_X(\tau)$$

- El máximo en módulo se obtiene en $\tau = 0$

$$|R_X(\tau)| \leq R_X(0)$$

- Si para algún T_o se cumple $R_X(T_o) = R_X(0)$, entonces para todo entero k

$$R_X(kT_o) = R_X(0)$$

- Es una función semidefinida positiva

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, R_X(t-s)\, g(s)\, dt\, ds \geq 0, \quad \forall g(t)$$

  - Implicación: $S_X(j\omega) = \mathcal{TF}\{R_X(\tau)\} \geq 0, \quad \forall \omega$

Ergodicidad

- Promedios para un proceso $X(t)$ y una función $g(x)$:
  1. Promedio estadístico

$$E[g(X(t))] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_{X(t)}(x)\, dx$$

     Este valor es, en general, dependiente de t
  2. Promedio temporal de $x(t, \lambda_i)$

$$< g(x) >_i = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(x(t, \lambda_i))\, dt$$

     Independiente de t, pero en general dependiente de λ_i
- El proceso estacionario $X(t)$ es ergódico si $\forall\ g(x)$ y $\forall\ \lambda_i \in \Omega$

$$< g(x) >_i = E[g(X(t))]$$

Energía y potencia

- Energía del proceso aleatorio $X(t)$, E_X

$$E_X = E[\mathcal{E}_X], \quad \mathcal{E}_X = \int_{-\infty}^{\infty} X^2(t)\, dt$$

- Potencia del proceso aleatorio $X(t)$, P_X

$$P_X = E[\mathcal{P}_X], \quad \mathcal{P}_X = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X^2(t)\, dt$$

  - Un proceso aleatorio es de energía si $E_X < \infty$
  - Un proceso aleatorio es de potencia si $0 < P_X < \infty$

Energía y potencia (II)

$$E_X = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} X^2(t)\,dt\right] = \int_{-\infty}^{\infty} E[X^2(t)]\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(t,t)\,dt$$

$$\begin{aligned} P_X &= E\left[\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X^2(t)\,dt\right] \\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} E[X^2(t)]\,dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_X(t,t)\,dt \end{aligned}$$

Para *procesos aleatorios estacionarios* $R_X(t,t) = R_X(0)$

$$P_X = R_X(0), \quad E_X = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(0)\,dt = \infty$$

Procesos estacionarios de interés: **procesos DE POTENCIA**

Procesos aleatorios multidimensionales (múltiples)

- Independencia:
  - $X(t)$ e $Y(t)$ son *independientes* si $\forall\ t_1, t_2$, las variables aleatorias $X(t_1)$ y $Y(t_2)$ son independientes
- Incorrelación:
  - $X(t)$ e $Y(t)$ están *incorrelados* si $\forall\ t_1, t_2$, las variables aleatorias $X(t_1)$ y $Y(t_2)$ están incorreladas
- Función de correlación cruzada

$$R_{X,Y}(t_1,t_2) = E[X(t_1)\,Y(t_2)]$$

  - En general $R_{X,Y}(t_1,t_2) = R_{Y,X}(t_2,t_1)$
- Estacionariedad conjunta: $X(t)$ e $Y(t)$ son *conjuntamente estacionarios* si
  - Ambos son individualmente estacionarios
    - ★ $m_X(t) = m_X,\ R_X(t+\tau,t) = R_X(\tau)$
    - ★ $m_Y(t) = m_Y,\ R_Y(t+\tau,t) = R_Y(\tau)$
  - $R_{X,Y}(t_1,t_2) = R_{X,Y}(\tau)$, con $\tau = t_1 - t_2$
    - ★ Notación alternativa: $R_{X,Y}(t+\tau,t) = R_{X,Y}(\tau)$

Función de autocorrelación temporal (ambigüedad temporal)

- Definición para una función/señal DETERMINISTA $x(t)$

$$x(t) \in R \quad \equiv \quad r_x(t) = x(t) * x(-t)$$

$$x(t) \in \mathcal{C} \quad \equiv \quad r_x(t) = x(t) * x^*(-t)$$

$$R_x(j\omega) = |X(j\omega)|^2$$

  - Señal "*adaptada*" a $x(t)$: señal abatida y conjugada, $x^*(-t)$
    - ★ En frecuencia: si $x(t) \overset{\mathcal{TF}}{\leftrightarrow} X(j\omega)$, para la señal adaptada $x^*(-t) \overset{\mathcal{TF}}{\leftrightarrow} X^*(j\omega)$

- Propiedades
  - Función simétrica con el máximo en cero
  - Permite calcular la energía de $x(t)$

$$\mathcal{E}\{x(t)\} = r_x(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_x(j\omega)\, d\omega$$

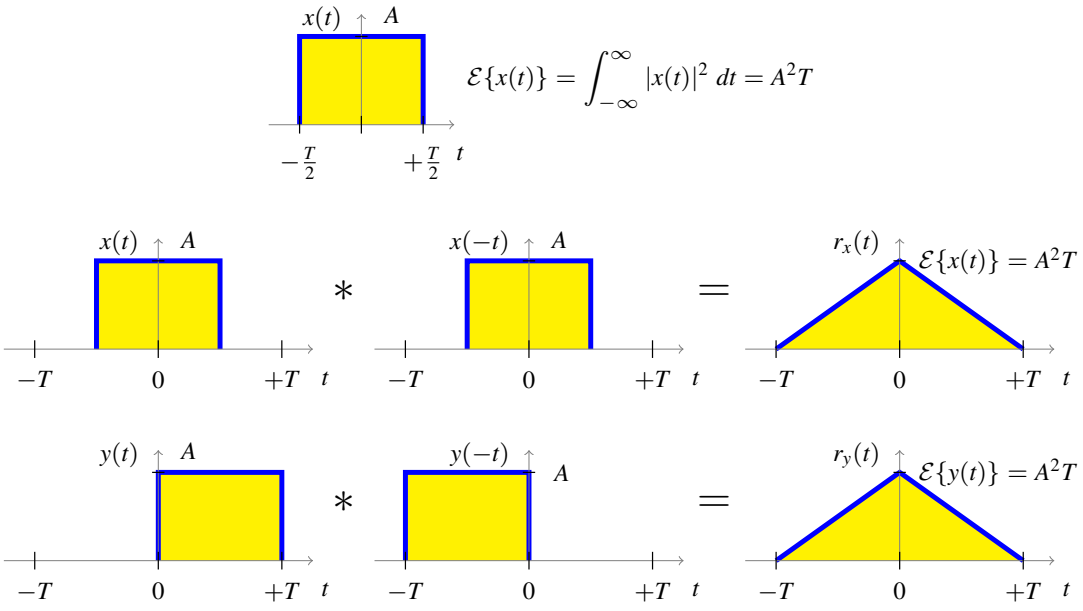
Esta propiedad es evidente teniendo en cuenta la definición de energía (relación de Parseval)

$$\mathcal{E}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2\, d\omega$$

  - Función invariante a la traslación de $x(t)$

$$y(t) = x(t - t_0) \rightarrow r_y(t) = r_x(t)$$

Ejemplo



Procesos aleatorios en el dominio de la frecuencia

- Espectro de una de las señales del proceso aleatorio

$$x_i(t) = X(t, \lambda_i) \rightarrow X_i(j\omega) = \mathcal{TF}\{x_i(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_i(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

  - No todas las señales tienen definida una transformada de Fourier
- Definición de señales truncadas de duración T

$$x_i^{[T]}(t) = \begin{cases} x_i(t), & |t| < T/2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Las señales truncadas sí tienen definida la transformada

$$X_i^{[T]}(j\omega) = \mathcal{TF}\left\{x_i^{[T]}(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_i^{[T]}(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_i(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

Densidad espectral de potencia

- Proceso aleatorio truncado de duración T

  $X^{[T]}(t)$: Proceso cuyas señales son $X^{[T]}(t, \lambda_i) = x_i^{[T]}(t)$ (truncadas)
- Proceso aleatorio truncado en el dominio de la frecuencia

  $X^{[T]}(j\omega)$: Proceso cuyas señales son las TF de $x_i^{[T]}(t)$, i.e., $X_i^{[T]}(j\omega)$
- Densidad espectral de potencia de $X(t)$

$$S_X(j\omega) \stackrel{def}{=} E\left[\lim_{T\to\infty} \frac{\left|X^{[T]}(j\omega)\right|^2}{T}\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{E\left[\left|X^{[T]}(j\omega)\right|^2\right]}{T}$$

Representación del comportamiento medio del módulo al cuadrado de la tranformada de Fourier de todas las señales que componen el proceso aleatorio (con el "*truco*" de truncar para asegurar la existencia de dicha transformada de Fourier para todas las señales, y llevando la longitud de truncado al límite)

  - Implicación: $S_X(j\omega) \geq 0, \quad \forall\omega$

Teorema de Wiener-Khinchin

Si para cualquier valor finito τ y cualquier intervalo $\mathcal{A}$, de longitud $|\tau|$, la autocorrelación del proceso aleatorio cumple

$$\left| \int_{\mathcal{A}} R_X(t+\tau, t) dt \right| < \infty$$

la densidad espectral de potencia de $X(t)$ es la transformada de Fourier del promedio temporal de la función de autocorrelación

$$S_X(j\omega) = \mathcal{TF}\{< R_X(t+\tau, t) >\}$$

siendo el promedio temporal de la función de autocorrelación

$$< R_X(t+\tau, t) > \stackrel{def}{=} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_X(t+\tau, t)\, dt$$

Teorema de Wiener-Khinchin - Corolarios

- Corolario 1: Si $X(t)$ es un proceso estacionario y $|\tau\, R_X(\tau)| < \infty$ para todo $|\tau| < \infty$, entonces

$$S_X(j\omega) = \mathcal{TF}\{R_X(\tau)\}$$

- Corolario 2: Si $X(t)$ es ciclostacionario y se cumple $\left| \int_0^{T_o} R_X(t+\tau, t)\, dt \right| < \infty$

  entonces

$$S_X(j\omega) = \mathcal{TF}\left\{\widetilde{R}_X(\tau)\right\}$$

  donde

$$\widetilde{R}_X(\tau) = \frac{1}{T_o} \int_{T_o} R_X(t+\tau, t)\, dt$$

  y T_o es el período del proceso cicloestacionario

Potencia de un proceso aleatorio

- En el dominio de la frecuencia

$$P_X = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_X(j\omega)\, d\omega \text{ Watts}$$

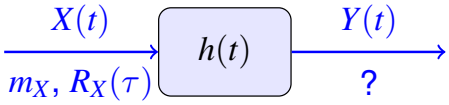
- En el dominio del tiempo
  - Proceso estacionario

$$P_X = R_X(0) \text{ Watts}$$

  - Proceso cicloestacionario

$$P_X = \tilde{R}_X(0) \text{ Watts}$$

Procesos aleatorios estacionarios y sistemas lineales



Teorema: $X(t)$ es estacionario, de media m_X y función de autocorrelación $R_X(\tau)$. El proceso pasa a través de un sistema lineal e invariante con respuesta al impulso $h(t)$. En este caso, *los procesos de entrada y salida, $X(t)$ e $Y(t)$, son conjuntamente estacionarios*, siendo

$$\begin{aligned} m_Y &= m_X \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, dt \\ R_Y(\tau) &= R_X(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) = R_X(\tau) * r_h(t) \\ R_{X,Y}(\tau) &= R_X(\tau) * h(-\tau) \\ R_{Y,X}(\tau) &= R_{X,Y}(-\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) \end{aligned}$$

Además $R_Y(\tau) = R_{X,Y}(\tau) * h(\tau) = R_{Y,X}(\tau) * h(-\tau)$

Media del proceso de salida

Se parte de que

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(s)\, h(t-s)\, ds$$

Por tanto

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} X(s)\, h(t-s)\, ds\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E[X(s)]\, h(t-s)\, ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} m_X\, h(t-s)\, ds \\ &\overset{u=t-s}{=} m_X \int_{-\infty}^{\infty} h(u)\, du \end{aligned}$$

Correlación cruzada $R_{X,Y}(\tau)$

$$\begin{aligned} R_{X,Y}(t_1,t_2) &= E[X(t_1)\, Y(t_2)] \\ &= E\left[X(t_1)\int_{-\infty}^{\infty} X(s)\, h(t_2-s)\, ds\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E[X(t_1)\, X(s)]\, h(t_2-s)\, ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(t_1-s)\, h(t_2-s)\, ds \\ &\overset{u=s-t_2}{=} \int_{-\infty}^{\infty} R_X(t_1-t_2-u)\, h(-u)\, du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau-u)\, h(-u)\, du \\ &= R_X(\tau) * h(-\tau) \end{aligned}$$

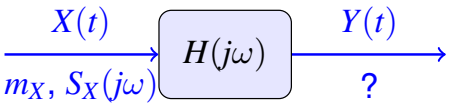
Correlación cruzada $R_{Y,X}(\tau)$

$$
\begin{aligned}
R_{Y,X}(t_1,t_2) &= E[Y(t_1)\ X(t_2)] \\
&= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} X(s)\ h(t_1-s)\ ds\ X(t_2)\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} E[X(s)\ X(t_2)]\ h(t_2-s)\ ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(s-t_2)\ h(t_1-s)\ ds \\
&\overset{u=s-t_2}{=} \int_{-\infty}^{\infty} R_X(u)\ h(t_1-t_2-u)\ du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(u)\ h(\tau-u)\ du \\
&= R_X(\tau) * h(\tau)
\end{aligned}
$$

Correlación de salida $R_Y(\tau)$

$$
\begin{aligned}
R_Y(t_1,t_2) &= E[Y(t_1)\ Y(t_2)] \\
&= E\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} X(s)\ h(t_1-s)\ ds\right)\ Y(t_2)\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} E[X(s)\ Y(t_2)]\ h(t_1-s)\ ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(s-t_2)\ h(t_1-s)\ ds \\
&\overset{u=s-t_2}{=} \int_{-\infty}^{\infty} R_{X,Y}(u)\ h(t_1-t_2-u)\ du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} R_{X,Y}(u)\ h(\tau-u)\ du \\
&= R_{X,Y}(\tau) * h(\tau) \\
&= R_X(\tau) * h(-\tau) * h(\tau) \\
&= R_X(\tau) * r_h(\tau)
\end{aligned}
$$

Relaciones en el dominio frecuencial



- Media del proceso de salida

$$m_Y = m_X\, H(0)$$

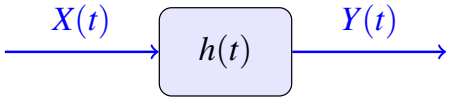
- Densidad espectral del proceso de salida

$$S_Y(j\omega) = S_X(j\omega)\ |H(j\omega)|^2$$

- Densidades espectrales cruzadas

$$\begin{aligned} S_{X,Y}(j\omega) &\overset{def}{=} \mathcal{TF}\{R_{X,Y}(\tau)\} \\ S_{X,Y}(j\omega) &= S_X(j\omega)\, H^*(j\omega) \\ S_{Y,X}(j\omega) &= S^*_{X,Y}(j\omega) = S_X(j\omega)\, H(j\omega) \end{aligned}$$

Relaciones entre densidades espectrales de potencia



$$S_X(j\omega) \times \begin{cases} H(j\omega) = S_{Y,X}(j\omega) \\ H^*(j\omega) = S_{X,Y}(j\omega) \\ |H(j\omega)|^2 = S_Y(j\omega) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S_{X,Y}(j\omega) &= S^*_{Y,X}(j\omega) \\ S_Y(j\omega) &= S_{X,Y}(j\omega)\, H(j\omega) \\ S_Y(j\omega) &= S_{Y,X}(j\omega)\, H^*(j\omega) \end{aligned}$$

Suma de procesos aleatorios

- $X(t)$ e $Y(t)$ son conjuntamente estacionarios
- Proceso suma: $\boxed{Z(t) = X(t) + Y(t)}$
  - Media del proceso
$$\begin{aligned} m_Z(t) &= E[Z(t)] = E[X(t) + Y(t)] \\ &= E[X(t)] + E[Y(t)] = m_X + m_Y = m_Z \end{aligned}$$
  - Función de autocorrelación
$$\begin{aligned} R_Z(t+\tau, t) =& E[Z(t+\tau)\, Z(t)] \\ =& E[(X(t+\tau) + Y(t+\tau))\, (X(t) + Y(t))] \\ =& E[X(t+\tau)\, X(t)] + E[X(t+\tau)\, Y(t)] \\ &+ E[Y(t+\tau)\, X(t)] + E[Y(t+\tau)\, Y(t)] \\ =& R_X(\tau) + R_{X,Y}(\tau) + R_{Y,X}(\tau) + R_Y(\tau) \\ =& R_X(\tau) + R_Y(\tau) + R_{X,Y}(\tau) + R_{Y,X}(\tau) = R_Z(\tau) \end{aligned}$$
    - ★ Proceso aleatorio $Z(t)$ es estacionario
  - Densidad espectral de potencia
$$\begin{aligned} S_Z(j\omega) =& S_X(j\omega) + S_Y(j\omega) + S_{X,Y}(j\omega) + S_{Y,X}(j\omega) \\ =& S_X(j\omega) + S_Y(j\omega) + 2\,\mathrm{Re}[S_{X,Y}(j\omega)] \end{aligned}$$

Suma de procesos aleatorios - Incorrelados

- Covarianza vs correlación para procesos conjuntamente estacionarios
$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X(t+\tau), Y(t)) =& E[(X(t+\tau) - m_X)\, (Y(t) - m_Y)] \\ =& \underbrace{E[X(t+\tau)\, Y(t)]}_{R_{X,Y}(\tau)} - m_Y\, \underbrace{E[X(t+\tau)]}_{m_X} \\ & - m_X\, \underbrace{E[Y(t)]}_{m_Y} + m_X\, m_Y \\ =& R_{X,Y}(\tau) - m_X\, m_Y \end{aligned}$$
- Procesos incorrelados:
$$\begin{aligned} &\text{Por definición : } \mathrm{Cov}(X(t+\tau), Y(t)) = 0,\ \forall \tau \\ &\text{Consecuencia : } R_{X,Y}(\tau) = m_X\, m_Y \end{aligned}$$
  - Si al menos uno de los procesos (incorrelados) tiene media nula
$$\begin{aligned} R_Z(\tau) &= R_X(\tau) + R_Y(\tau) \\ S_Z(j\omega) &= S_X(j\omega) + S_Y(j\omega) \end{aligned}$$
    - ★ Caso habitual de suma de señal y ruido: incorrelación, ruido con media nula

Procesos aleatorios discretos

- Notación: $\boxed{X[n]}$
- Promedios estadísticos
  - Media: $\boxed{m_X[n] = E\left[X[n]\right]}$
  - Autocorrelación: $\boxed{R_X[n+k,n] = E\left[X[n+k]\,X[n]\right]}$
    - ⋆ Para procesos aleatorios complejos $\boxed{R_X[n+k,n] = E\left[X[n+k]\,X^*[n]\right]}$
- Estacionariedad:
  - Estadísticos independientes del índice temporal n
  - Media: $\boxed{m_X[n] = m_X}$
  - Autocorrelación: $\boxed{R_X[n+k,n] = R_X[k]}$
- Cicloestacionariedad:
  - Estadísticos periódicos de período N
  - Media: $\boxed{m_X[n+N] = m_X[n]}$
  - Autocorrelación: $\boxed{R_X[n+k+N,n+N] = R_X[n+k,n]}$

Procesos aleatorios discretos - Espectro y potencia

- Densidad espectral de potencia
  - Procesos estacionarios

$$\boxed{S_X(e^{j\omega}) = \mathcal{TF}\left\{R_X[k]\right\}}$$

  - Procesos cicloestacionarios

$$\boxed{S_X(e^{j\omega}) = \mathcal{TF}\left\{\tilde{R}_X[k]\right\}, \qquad \tilde{R}_X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} R_X[n+k,n]}$$

  - Potencia

$$\boxed{P_X = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_X(e^{j\omega})\,d\omega = \begin{cases} R_X[0], & X[n] \text{ estacionario} \\ \tilde{R}_X[0], & X[n] \text{ cicloestacionario} \end{cases}}$$

Procesos aleatorios discretos - Sistemas lineales

- Media del proceso de salida

$$m_Y = m_X \sum_n h[n] = m_X\, H(0)$$

- Autocorrelación del proceso de salida

$$R_Y[k] = R_X[k] * h[k] * h[-k] = R_X[k] * r_h[k]$$

- Densidad espectral de potencia del proceso de salida

$$S_Y(e^{j\omega}) = S_X(e^{j\omega})\ \left|H(e^{j\omega})\right|^2$$

- Estadísticos cruzados

$$R_{X,Y}[k] = R_X[k] * h[-k] \qquad R_{Y,X}[k] = R_X[k] * h[k]$$

$$S_{X,Y}(e^{j\omega}) = S_X(e^{j\omega})\ H^*(e^{j\omega}) \qquad S_{Y,X}(e^{j\omega}) = S_X(e^{j\omega})\ H(e^{j\omega})$$

Procesos aleatorios discretos - Suma de procesos

- $X[n]$ e $Y[n]$ conjuntamente estacionarios
- Proceso suma: $Z[n] = X[n] + Y[n]$
  - Media del proceso:

$$m_Z[n] = m_X + m_y \equiv m_Z$$

  - Función de autocorrelación

$$R_Z[n+k,n] = R_X[k] + R_Y[k] + R_{X,Y}[k] + R_{Y,X}[k] \equiv R_Z[k]$$

    - ⋆ El proceso $Z[n]$ es estacionario
  - Densidad espectral de potencia

$$S_Z\left(e^{j\omega}\right) = S_X\left(e^{j\omega}\right) + S_Y\left(e^{j\omega}\right) + S_{X,Y}\left(e^{j\omega}\right) + S_{Y,X}\left(e^{j\omega}\right)$$

- $X[n]$ e $Y[n]$ incorrelados y al menos uno tiene media nula

$$R_Z[k] = R_X[k] + R_Y[k], \qquad S_Z\left(e^{j\omega}\right) = S_X\left(e^{j\omega}\right) + S_Y\left(e^{j\omega}\right)$$

Proceso gausiano

- Definición: $X(t)$ es un *proceso gausiano* si para todo n y todo $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$, las v.a. $\{X(t_i)\}_{i=1}^{n}$ tienen una distribución conjuntamente gausiana
- Propiedades de los procesos gausianos
  - $m_X(t)$ y $R_X(t_1, t_2)$: descripción estadística completa de $X(t)$
    - ★ Permiten calcular vector de medias y matriz de covarianzas
      - Para $X(t_i)$, $\Rightarrow \mu_i = m_X(t_i)$
      - $X(t_i), X(t_j)$, $\Rightarrow C_{i,j} = \text{Cov}(X(t_i), X(t_j)) = R_X(t_i, t_j) - m_X(t_i)\, m_X(t_j)$
  - Estacionariedad en sentido estricto y en sentido amplio son equivalentes
  - Para $X(t)$ gausiano, estacionario y de media nula, una condición suficiente para la ergodicidad de $X(t)$ es

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R_X(\tau)|\, d\tau < \infty$$

  - Si $X(t)$ pasa por un sistema lineal e invariante
    - ★ El proceso de salida $Y(t)$ es gausiano
    - ★ $X(t)$ e $Y(t)$ son conjuntamente gausianos

Procesos aleatorios conjuntamente gausianos

- Definición: Los procesos $X(t)$ e $Y(t)$ son *conjuntamente gausianos*, si para todo n, m, y todo $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ y $\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m\}$, las variables aleatorias

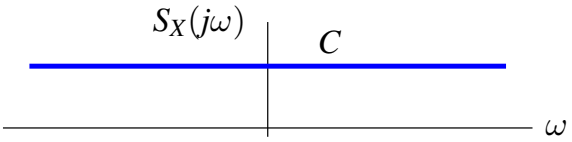
$$\{X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n), Y(\tau_1), Y(\tau_2), \ldots, Y(\tau_m)\}$$

  tienen una distribución conjuntamente gausiana (de dimensión $n + m$)
- Propiedad: Para procesos conjuntamente gausianos, incorrelación e independencia son equivalentes

Proceso blanco (estacionario)

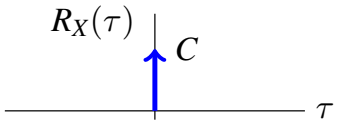
- Un proceso es blanco si su densidad espectral de potencia es constante para todas las frecuencias

$$S_X(j\omega) = C$$



  - Consecuencias
    - ★ Función de autocorrelación de un proceso blanco estacionario

$$R_X(\tau) = \mathcal{TF}^{-1}\{C\} = C\,\delta(\tau)$$

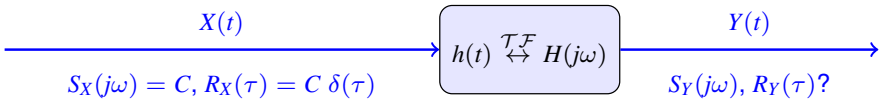


    - ★ La potencia de un proceso blanco es infinita

$$P_X = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_X(j\omega)\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C\,d\omega = \infty \text{ Watts.}$$

$X(t)$ estacionario : $P_X = R_X(0) = C\,\delta(0) = \infty$ Watts.

Filtrado de un proceso blanco



- Densidad espectral de potencia a la salida del filtro ($Y(t)$)

$$S_Y(j\omega) = S_X(j\omega)\,|H(j\omega)|^2 = C\,|H(j\omega)|^2$$

  - En general el proceso $Y(t)$ no es blanco
    - ★ $|H(j\omega)|$ es constante sólo para un sistema paso todo: atenuador o amplificador
- Función de autocorrelación

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) = R_X(\tau) * r_h(\tau) = C\,r_h(\tau)$$

- Potencia del proceso

$$P_Y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_X(j\omega)\,d\omega = C\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2\,d\omega, \quad P_Y = R_Y(0) = C\,r_h(0)$$

  - Como por definición $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2\,d\omega = \mathcal{E}\{h(t)\} = r_h(0)$

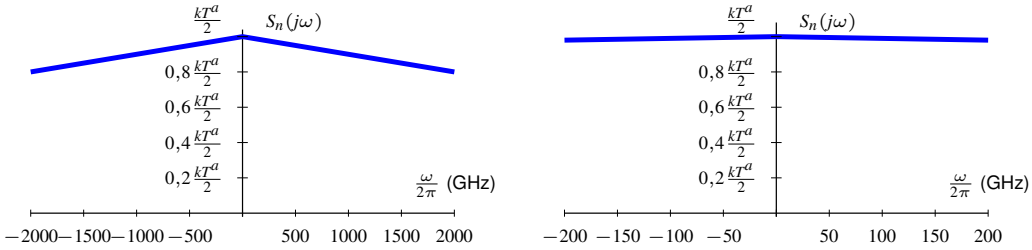
$$P_Y = C\,\mathcal{E}\{h(t)\} \text{ Watts.}$$

Ruido térmico

- Estadística gausiana
  - Media nula
- Densidad espectral de potencia del ruido térmico (mecánica cuántica)

$$S_n(j\omega) = \frac{h\omega}{4\pi(e^{\frac{h\omega}{2\pi kT^a}} - 1)}$$

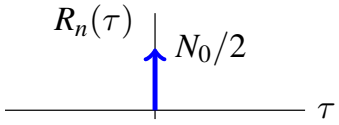
donde
- h: Constante de Planck (6.6×10^{-34} Julios $\times$ segundo)
- k: Constante de Boltzmann (1.38×10^{-23} Julios/ºKelvin)
- T^a: Temperatura en grados Kelvin
- ω: Pulsación (2π veces la frecuencia) en rad/s



Modelo de ruido térmico

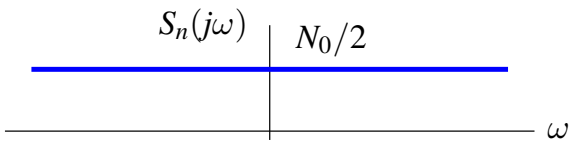
- Proceso aleatorio $n(t)$
  - Blanco, gausiano, estacionario y ergódico
  - Media nula ($m_n = 0$)
  - Función de autocorrelación

$$R_n(\tau) = \frac{N_0}{2}\,\delta(\tau)$$



  - Densidad espectral de potencia

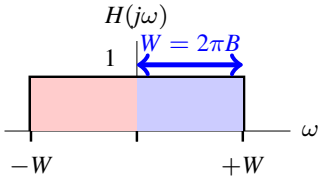
$$S_n(j\omega) = \frac{N_0}{2}$$



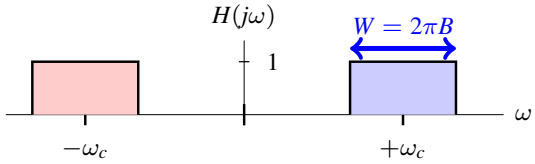
- Valor de la constante N_0: $N_0 = k\,T^a$ Watt/Hz
- Potencia $P_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_n(j\omega)\,d\omega = R_n(0) = \infty$

Potencia de ruido térmico a la salida de filtros ideales

- Filtros ideales de ancho de banda B Hz (o $W = 2\pi B$ rad/s): filtro paso bajo o filtro paso banda con frecuencia central f_c Hz (o $\omega_c = 2\pi f_c$ rad/s)



Filtro paso bajo



Filtro paso banda (frecuencia central ω_c rad/s)

- Proceso de salida de los filtros

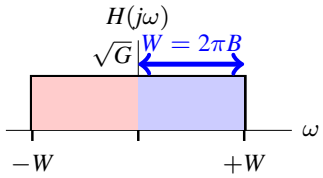
$$\text{Proceso } Z(t) \text{ con } S_Z(j\omega) = \frac{N_0}{2}\,|H(j\omega)|^2$$

- Potencia de la salida de los filtros

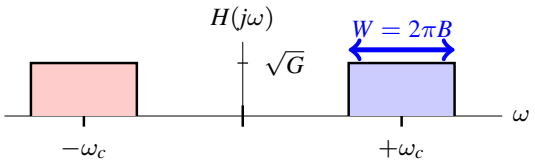
$$P_Z = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_z(j\omega)\,d\omega = \frac{N_0}{2}\,\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|H(j\omega)|^2\,d\omega}_{\mathcal{E}\{h(t)\}=2B} = N_0\,B \text{ Watts.}$$

Potencia de ruido térmico en filtros ideales con ganancia

- Filtros ideales (paso bajo/paso banda) de ancho de banda B Hz (o $W = 2\pi B$ rad/s) y con ganancia en potencia G (ganancia en voltaje $\sqrt{G}$)



Filtro paso bajo



Filtro paso banda (frecuencia central ω_c rad/s)

- Proceso de salida de los filtros

$$\text{Proceso } Z(t) \text{ con } S_Z(j\omega) = \frac{N_0}{2}\,|H(j\omega)|^2$$

- Potencia de la salida de los filtros

$$P_Z = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_z(j\omega)\,d\omega = \frac{N_0}{2}\,\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|H(j\omega)|^2\,d\omega}_{\mathcal{E}\{h(t)\}=2BG} = N_0\,B\,G \text{ Watts.}$$

Ancho de banda equivalente de ruido

- Ruido a la salida de un sistema lineal
  - Respuesta del sistema: $h(t) \overset{\mathcal{TF}}{\leftrightarrow} H(j\omega)$

$$\text{Proceso } Z(t) \text{ con } S_Z(j\omega) = \frac{N_0}{2}\,|H(j\omega)|^2$$

- Potencia de ruido a la salida del sistema lineal

$$P_Z = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_Z(j\omega)\,d\omega = \frac{N_0}{2}\,\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|H(j\omega)|^2\,d\omega}_{\mathcal{E}\{h(t)\}}$$

- Potencia de ruido en función del ancho de banda equivalente de ruido

$$P_Z = N_0\,B_{eq}\,G_{eq} \text{ Watts.}$$

  - B_{eq}: Ancho de banda equivalente de ruido
  - G_{eq}: Ganancia en potencia equivalente

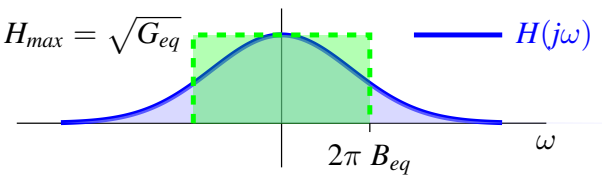
Ancho de banda equivalente de ruido - Identificación

- Definición: $G_{eq} = H_{max}^2$, con $H_{max} = \max_{\omega} |H(j\omega)|$
- Identificación del valor de B_{eq}

$$B_{eq} = \frac{\mathcal{E}\{h(t)\}}{2\,G_{eq}} \text{ Hz}$$

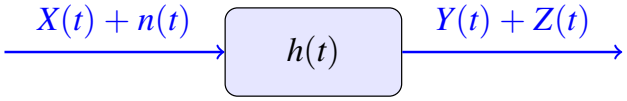
$$\mathcal{E}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|H(j\omega)|^2\,d\omega \text{ J}$$

- Interpretación: Un sistema lineal ideal, de ancho de banda B_{eq} y amplitud H_{max} ($\sqrt{G_{eq}}$) tiene la misma potencia de ruido a la salida que el filtro $h(t)$



Relación señal a ruido: necesidad de filtrado de ruido

- Planteamiento
  - Señal a la transmitida: proceso $X(t)$, con potencia P_X
  - Ruido aditivo: modelo de ruido térmico $n(t)$
  - Filtro (normalmente en el receptor): respuestas $h(t)$ y $H(j\omega)$
    - ★ Señal a la salida del filtro receptor: proceso $Y(t)$
    - ★ Ruido a la salida del filtro receptor: proceso $Z(t)$



$$Y(t) = X(t) * h(t)$$
$$Z(t) = n(t) * h(t)$$

- Relación señal a ruido sin filtrar

$$\left.\frac{S}{N}\right|_{in} = \frac{P_X}{P_n}, \quad \left.\frac{S}{N}\right|_{in}(\text{dB}) = 10\log_{10}\frac{P_X}{P_n}\ \text{dB}$$

- Relación señal a ruido a la salida del filtro

$$\left.\frac{S}{N}\right|_{out} = \frac{P_Y}{P_Z}, \quad \left.\frac{S}{N}\right|_{out}(\text{dB}) = 10\log_{10}\frac{P_Y}{P_Z}\ \text{dB}$$

Relación señal a ruido: necesidad de filtrado de ruido (II)

- Relación señal a ruido antes de filtrar

$$\left.\frac{S}{N}\right|_{in} = \frac{P_X}{P_n} = \frac{P_X}{\infty} = 0, \quad \left.\frac{S}{N}\right|_{in}(\text{dB}) = 10\log_{10}\frac{P_X}{P_n} = -\infty\ \text{dB}$$

Es necesario filtrar para limitar la potencia del ruido térmico !!!

- Relación señal a ruido a la salida del filtro

$$\left.\frac{S}{N}\right|_{out} = \frac{P_Y}{P_Z}, \quad \left.\frac{S}{N}\right|_{out}(\text{dB}) = 10\log_{10}\frac{P_Y}{P_Z}\ \text{dB}$$

  - Pot. señal: $P_Y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_Y(j\omega)\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_X(j\omega)\, |H(j\omega)|^2\, d\omega$
  - Potencia ruido: $P_Z = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_Z(j\omega)\, d\omega = \frac{N_0}{2}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2\, d\omega$
    - ★ Filtros ideales (sin ganancia | con ganancia)

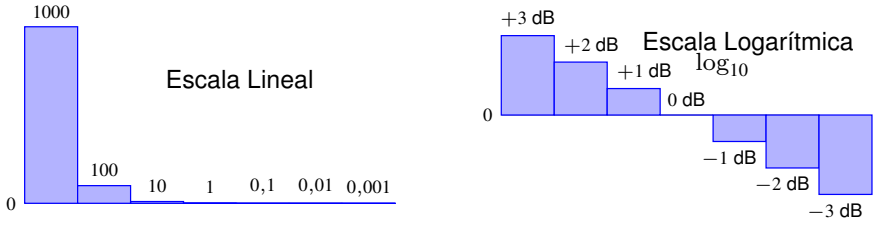
$$P_Z = N_0\, B \quad | \quad P_Z = N_0\, B\, G$$

    - ★ Filtro con ancho de banda equivalente B_{eq} Hz y ganancia G_{eq}

$$P_Z = N_0\, B_{eq}\, G_{eq}$$

Escala logarítmica: decibelios

- Relación entre cantidades (medida relativa, adimensional)
  - Escala logarítmica para poder visualizar de forma conjunta cantidades con valores muy diferentes entre sí



  - Ejemplos
    - ★ Relación de potencias

$$\text{dB} \equiv 10\ \log_{10}\frac{P_1}{P_2}$$

    - ★ Relación de voltajes o intensidades

$$\text{dB} \equiv 20\ \log_{10}\frac{V_1}{V_2} \qquad \text{dB} \equiv 20\ \log_{10}\frac{I_1}{I_2}$$

    - ★ Representación de la respuesta en frecuencia de un sistema

$$\text{dB} \equiv 20\ \log_{10}|H(j\omega)| = 10\ \log_{10}|H(j\omega)|^2$$

Propiedades de la representación logarítmica

- Operación inversa

$$\text{dB} \equiv 10\ \log_{10}\frac{P_1}{P_2} \qquad \text{dB} \equiv 20\ \log_{10}\frac{V_1}{V_2}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = 10^{\frac{dB}{10}} \qquad \frac{V_1}{V_2} = 10^{\frac{dB}{20}}$$

- Productos en lineal se convierten en sumas en dB

$$A \times B \leftrightarrow 10\log_{10}(A \times B) = 10\log_{10}A + 10\log_{10}B = a\ \text{dB} + b\ \text{dB}$$

$$\frac{A}{B} \leftrightarrow 10\log_{10}\frac{A}{B} = 10\log_{10}A - 10\log_{10}B = a\ \text{dB} - b\ \text{dB}$$

- Doblar/dividir por dos, en lineal, equivale a
  - Sumar/restar 3 dB ($10\log_{10}2$)
  - Sumar/restar 6 dB ($20\log_{10}2$)
- Multiplicar/dividir por 10, en lineal, equivale a
  - Sumar/restar 10 dB ($10\log_{10}10$)
  - Sumar/restar 20 dB ($20\log_{10}20$)

Unidades basadas en el decibelio

- Miden la diferencia relativa respecto de una unidad de referencia
  - Ejemplo: Intensidad sonora (ref.: umbral de audición, 1 pW/m^2)

$$\text{dB}_{\text{SI}} \equiv 10\ \log_{10}\frac{P_1}{P_0} = 10\ \log_{10}\frac{P_1}{10^{-12}}$$

    - ★ Referencia: 0 dB$_{\text{SI}}$ equivalen a una intensidad igual al umbral de audición
- Otras unidades logarítmicas
  - dBW: referencia 1 W (potencia)
  - dBm: referencia 1 mW (potencia)
  - dBu: referencia $\sqrt{\frac{3}{5}} = 0{,}7746$ V (voltaje)
    - ★ Es la tensión que aplicada a una impedancia de 600 Ω desarrolla una potencia de 1 mW
  - dBc: toma como referencia el valor de la portadora (para medir el valor de sus armónicos)
  - dB$_{\text{SPL}}$: referencia de nivel de presión sonora
    - ★ En el aire: 10 μPa
    - ★ En el agua: 1 μPa
  - dBI: toma como referencia una antena isotrópica