

Teoría de la Comunicación

Capítulo 2

Modulaciones Analógicas

Marcelino Lázaro

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad Carlos III de Madrid



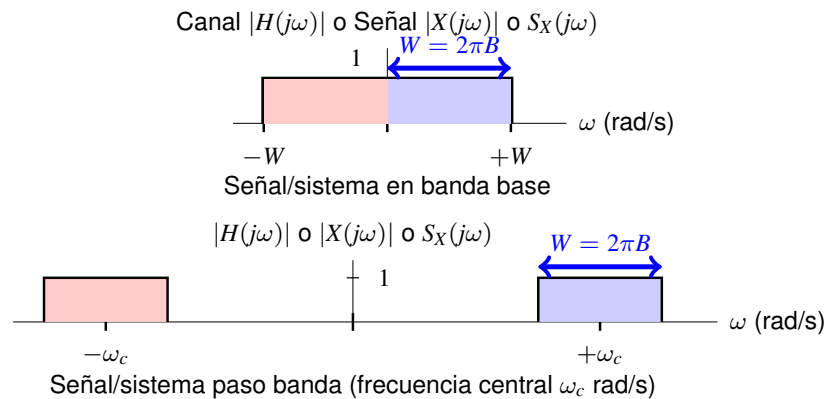
1 / 112

Índice de contenidos

- Introducción al concepto de modulación
- Modulaciones de amplitud (AM)
 - ▶ Modulación AM convencional
 - ▶ Modulación de doble banda lateral (DBL)
 - ▶ Modulación de banda lateral única (BLU)
 - ▶ Modulación de banda lateral vestigial (BLV)
- Modulaciones angulares
 - ▶ Modulación de fase (PM)
 - ▶ Modulación de frecuencia (FM)
- Efecto del ruido en modulaciones analógicas

Ancho de banda de una señal/sistema

- Señal/sistema en **banda base**
 - ▶ Respuesta en frecuencia centrada en 0 Hz
- Señal/sistema **paso banda**
 - ▶ Respuesta en frecuencia centrada en la frecuencia central f_c Hz (o equivalentemente en $\omega_c = 2\pi f_c$ rad/s)
- **Ancho de banda** (B Hz, o $W = 2\pi B$ rad/s)
 - ▶ Rango de **frecuencias positivas** utilizadas o disponibles



Señal analógica a transmitir: señal moduladora $m(t)$

- Caso determinista: características de la **señal $m(t)$**
 - ▶ Señal paso bajo de **ancho de banda B Hz** (o $W = 2\pi B$ rad/s)
 - ★ Transformada de Fourier **$M(j\omega)$ con $M(j\omega) = 0$ para $|\omega| > 2\pi B$**
 - ▶ Es una señal de potencia. Su potencia es P_m Watts

$$P_m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |m(t)|^2 dt$$

- Caso aleatorio: análisis estadístico (señal “promedio”)

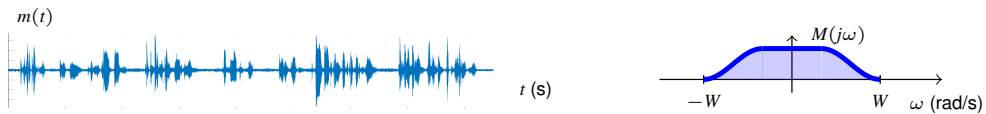
- ▶ Modelo para la señal: **proceso aleatorio $M(t)$**
 - ★ Proceso estacionario en sentido amplio (WSS)
 - ★ Media nula **$m_M = 0$**
 - ★ Función de autocorrelación **$R_M(\tau)$**
 - ★ Densidad espectral de potencia **$S_M(j\omega)$**
 - ★ **Ancho de banda B Hz** : **$S_M(j\omega) = 0$ para $|\omega| > 2\pi B$**
 - ★ Potencia: P_M Watts.

$$P_M = R_M(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_M(j\omega) d\omega$$

Sistemas de comunicaciones analógicos

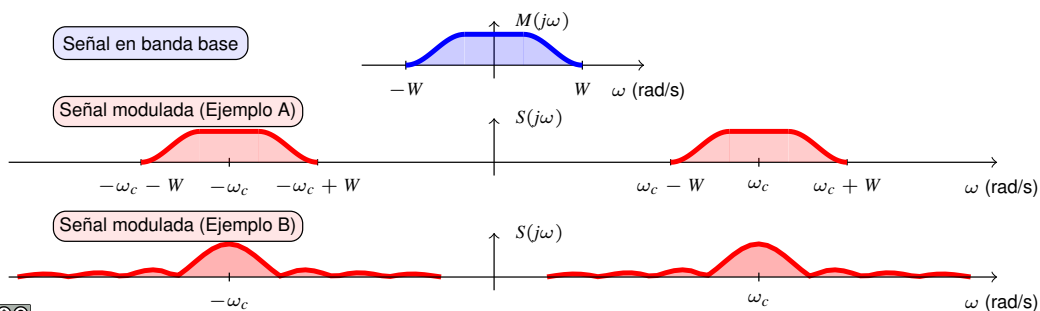
● Señal de información (moduladora) $m(t)$

- ▶ Señal analógica: la información está en la forma de onda $m(t)$
- ▶ Ancho de banda finito en banda base: ancho de banda W rad/s



● Modos de transmisión en sistemas analógicos

- ▶ Transmisión en banda base (sin modular)
- ▶ Transmisión de la señal modulada: $s(t)$
 - ★ Se traslada el espectro de la señal (frecuencia central o de portadora ω_c)
 - ★ Se puede modificar o no la forma o ancho de banda del espectro de la señal



Propósito de modular una señal analógica

1 Adecuar la señal a las características del canal

- ▶ Elegir el rango de frecuencias apropiado y/o disponible
 - ★ El espectro de la señal se desplaza a la banda de frecuencias correspondiente

2 Expandir el ancho de banda

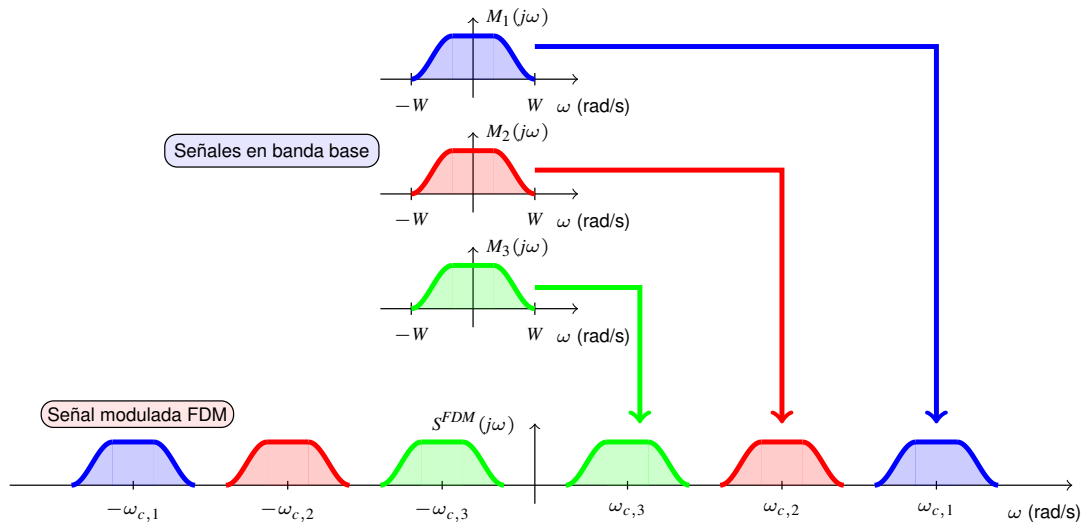
- ▶ Aumentar la inmunidad al ruido de la señal modulada durante la transmisión

3 Multiplexación / acceso al medio

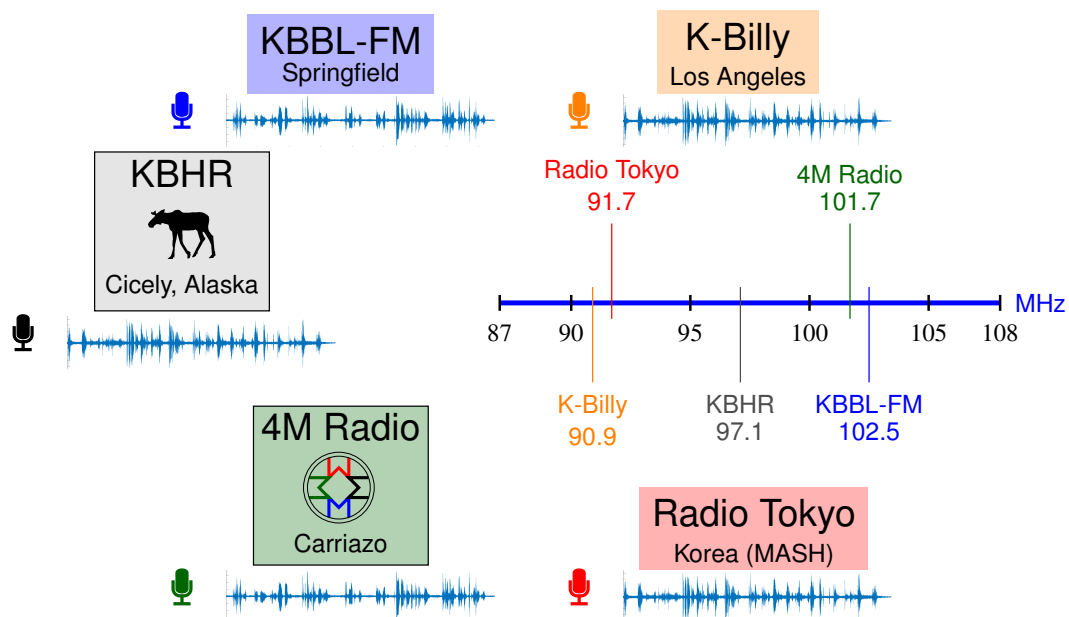
- ▶ Acomodar la transmisión simultánea de distintas señales en un mismo medio
 - ★ Frequency Division Multiplexing (FDM)
 - ★ Frequency Division Multiple Access (FDMA)

Multiplexación por división en frecuencia (FDM)

- Se traslada el espectro de distintas señales a distintas bandas de frecuencia de forma que no se solapen (en frecuencia)

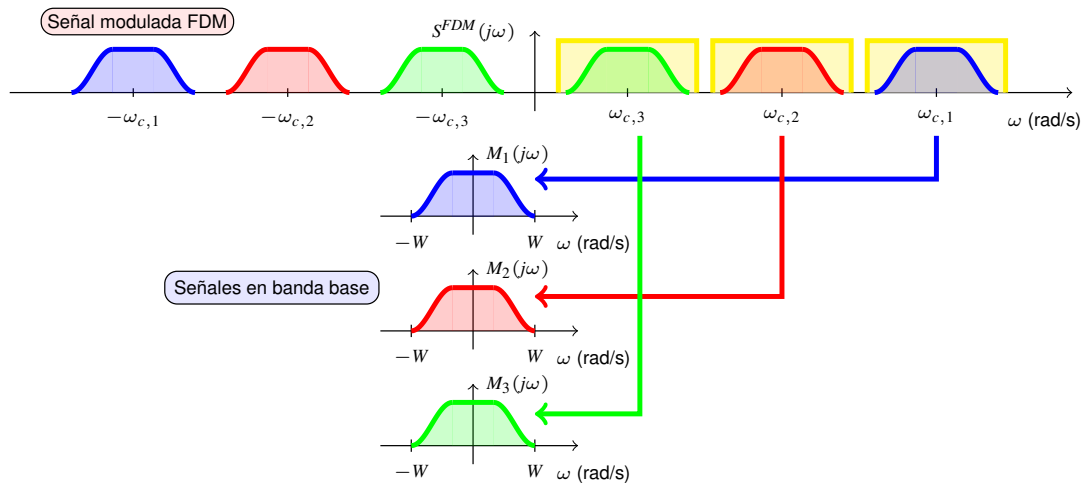


FDM - Ejemplo : Radio comercial



Demultiplexación por división en frecuencia (FDM)

- En el receptor, se filtra el espectro de cada señal y se devuelve a banda base, lo que permite recuperar cada señal



Introducción al concepto de modulación

- Modulación analógica:
 - La señal de información analógica (moduladora) se imprime en una portadora sinusoidal

$$c(t) = A_c \cos(\underbrace{2\pi f_c t}_{\omega_c} + \phi_c) \left\{ \begin{array}{l} \text{Amplitud : } A_c \\ \text{Fase : } \phi_c \\ \text{Frecuencia: } f_c \text{ u } \omega_c \end{array} \right.$$

- Parámetros de una portadora sinusoidal:
 - ★ Amplitud: $A_c \text{ V}$
 - ★ Fase: $\phi_c \text{ rad}$
 - ★ Frecuencia: $f_c \text{ Hz}$ (o equivalentemente, $\omega_c = 2\pi f_c \text{ rad/s}$)

Tipos de modulación analógica

- De amplitud (AM: Amplitude Modulation) $A_c \rightarrow A_c(t) = f(m(t))$
- Modulaciones angulares
 - ★ De fase (PM: Phase Modulation) $\phi_c \rightarrow \phi_c(t) = f(m(t))$
 - ★ De frecuencia (FM: Frequency Modulation) $f_i(t) = f_c \rightarrow f_i(t) = f(m(t))$
 $f_i(t)$: frecuencia instantánea de la señal

Modulaciones de amplitud (AM)

- La señal moduladora (o mensaje) $m(t)$ se imprime en la amplitud de la señal portadora $c(t)$, es decir, en A_c

$$c(t) = A_c \cos(\omega_c t + \phi_c)$$

$$A_c \rightarrow A_c(t) = f(m(t))$$

- Existen distintas variantes de modulación AM
 - AM: Modulación AM convencional (con portadora)
 - DBL: Doble Banda Lateral (sin portadora)
 - BLU: Banda Lateral Única
 - BLV: Banda Lateral Vestigial

Modulación AM convencional

- AM con portadora + doble banda lateral (DBL)

$$s(t) = \underbrace{A_c \cos(\omega_c t + \phi_c)}_{\text{Portadora } c(t)} + \underbrace{m(t) \times A_c \cos(\omega_c t + \phi_c)}_{\text{Doble banda lateral (DBL): } m(t) \times c(t)}$$

$$s(t) = A_c [1 + m(t)] \cos(\omega_c t + \phi_c)$$

- Situación deseable: envolvente proporcional a $m(t)$

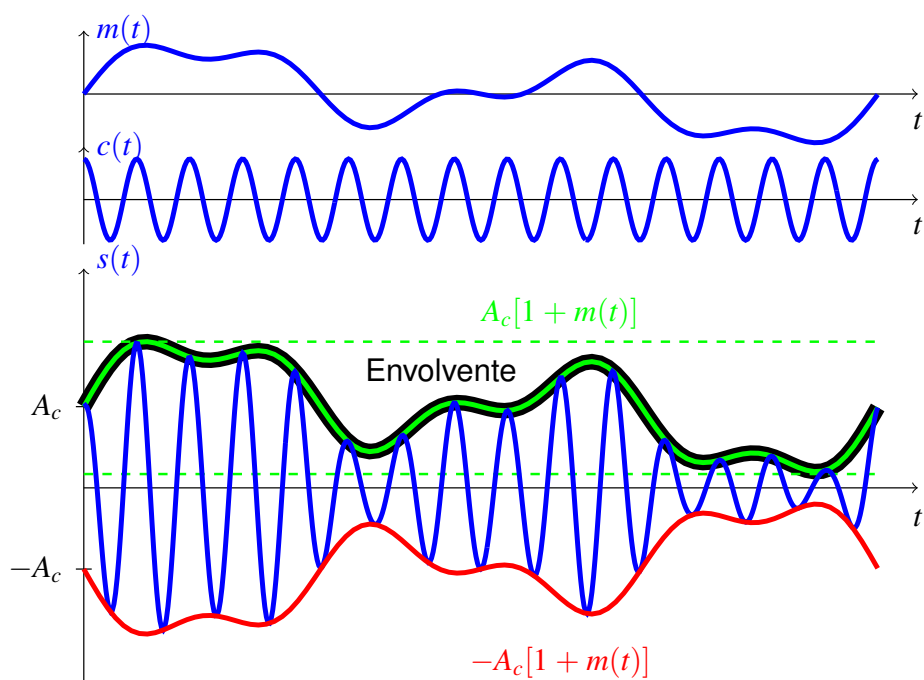
$$\text{Si } A_c [1 + m(t)] \geq 0 \forall t \Rightarrow \text{Envolvente} \equiv A_c [1 + m(t)]$$

- Sobremodulación: se produce cuando $A_c [1 + m(t)] < 0$ en algunos instantes

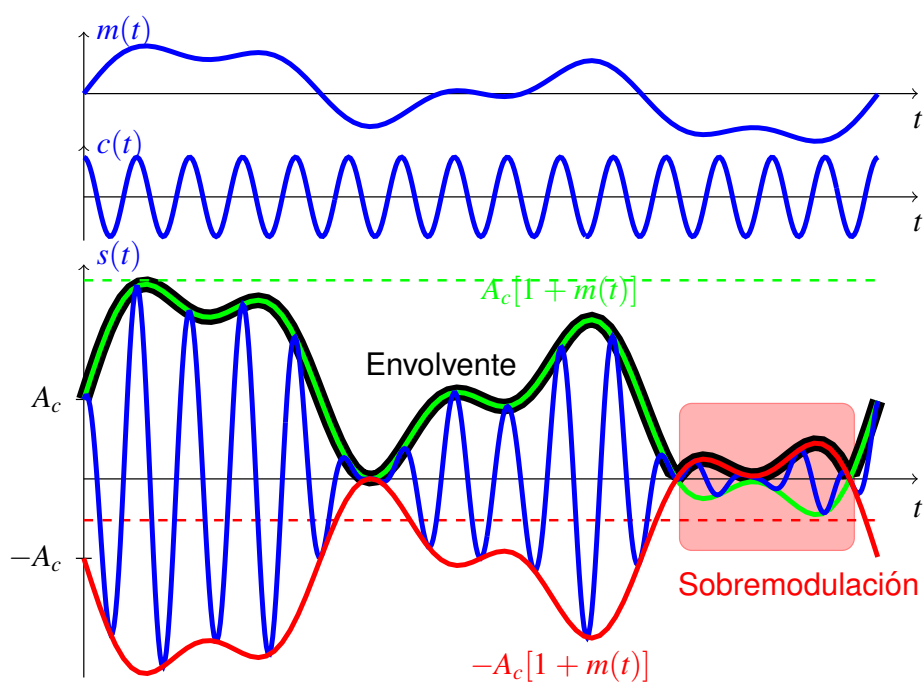
- Causa:
 - ★ Sucede cuando $m(t) < -1$
- Efecto:
 - ★ La portadora se invierte en esos instantes
 - ★ La envolvente pasa a ser $-A_c [1 + m(t)]$
- Solución:

$$\text{Asegurar que } |m(t)| \leq 1 \begin{cases} \text{Normalización del mensaje: } m_n(t) \\ \text{Introducción del ÍNDICE DE MODULACIÓN: } a \end{cases}$$

Modulación AM sin sobremodulación



Modulación AM con sobremodulación



Modulación AM convencional - Índice de modulación

- Señal moduladora (mensaje) normalizada $m_n(t)$

$$m_n(t) = \frac{m(t)}{\max |m(t)|} = \frac{m(t)}{C_M}$$

- $C_M = \max |m(t)|$: Rango de $m(t)$: $-C_M \leq m(t) \leq +C_M$

- Índice de modulación (a)

- Se reemplaza $m(t)$ por señal moduladora con índice de modulación a

$$m_a(t) = a \times m_n(t) = \frac{a}{C_M} \times m(t)$$

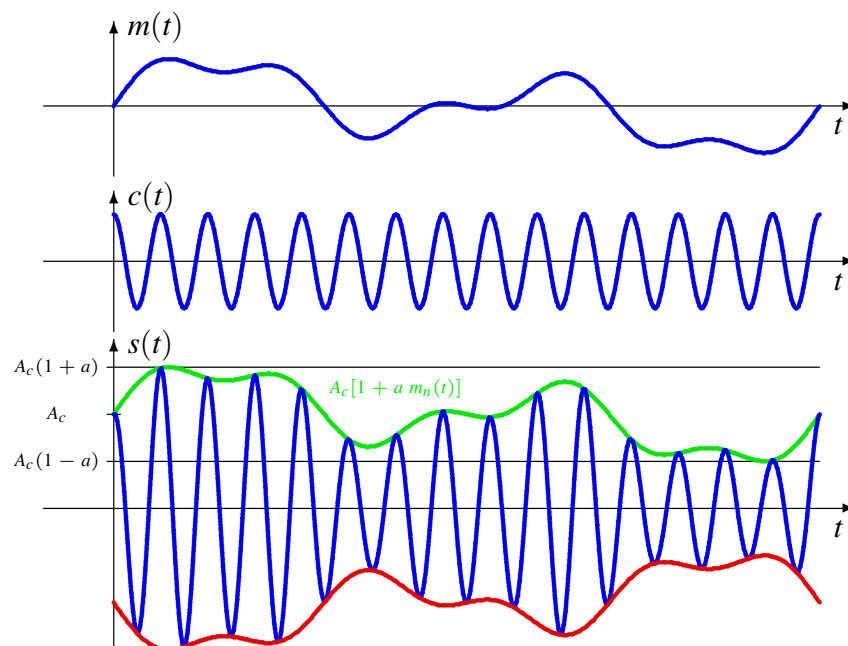
Rango de $m_a(t)$: $-a \leq m_a(t) \leq +a$

- ★ Para evitar la sobremodulación: $0 < a \leq 1$

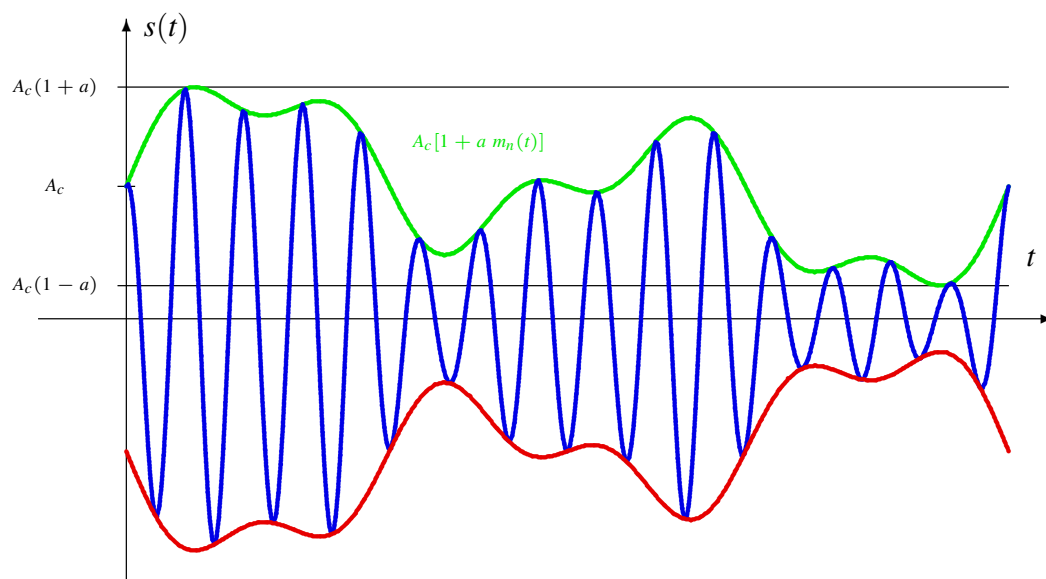
- Señal modulada con índice de modulación a

$$\begin{aligned} s(t) &= A_c [1 + \underbrace{a m_n(t)}_{m_a(t)}] \cos(\omega_c t + \phi_c) \\ &= A_c \cos(\omega_c t + \phi_c) + m_a(t) \times A_c \cos(\omega_c t + \phi_c) \end{aligned}$$

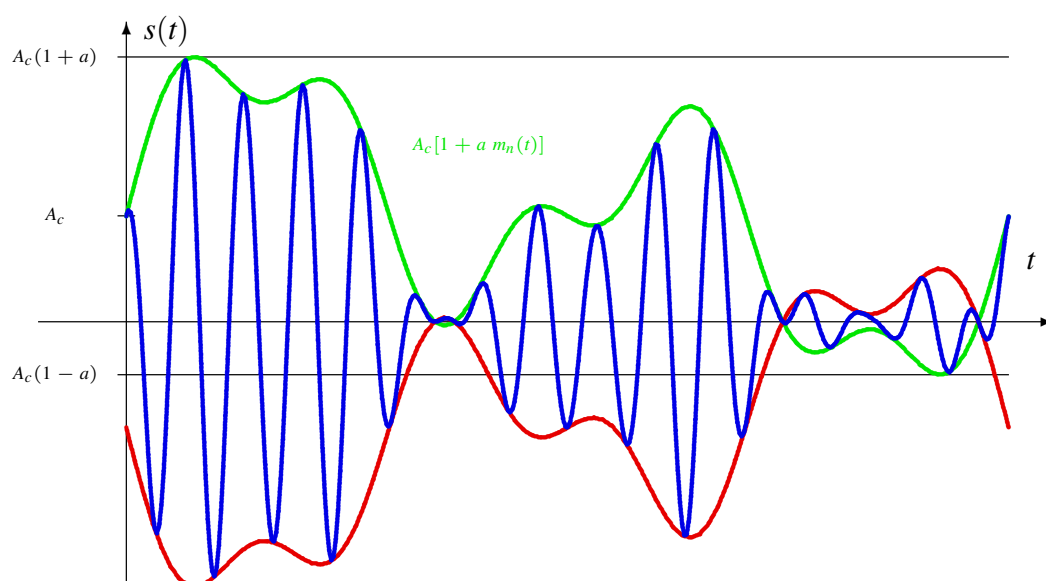
Forma de onda de una modulación AM convencional



Forma de onda de una modulación AM ($a = 0,75$)



Sobremodulación ($a = 1,5$)



Espectro de la señal AM Convencional - Determinista

- Señal AM convencional: $s(t) = c(t) + m_a(t) \times c(t)$

$$s(t) = A_c \cos(\omega_c t + \phi_c) + \underbrace{m_a(t)}_{\frac{a}{C_M} m(t)} \times A_c \cos(\omega_c t + \phi_c)$$

- Señal $m(t)$ determinista con TF $M(j\omega)$, $M(j\omega) = 0$ para $|\omega| > 2\pi B$

► Espectro de $m_a(t) = a m_n(t)$: $M_a(j\omega) = a M_n(j\omega) = \frac{a}{C_M} M(j\omega)$

- Espectro de señal AM convencional

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= \mathcal{TF}\{A_c \cos(\omega_c t + \phi_c)\} + \frac{1}{2\pi} \mathcal{TF}\{m_a(t)\} * \mathcal{TF}\{A_c \cos(\omega_c t + \phi_c)\} \\ &= A_c \pi [\delta(\omega - \omega_c) e^{j\phi_c} + \delta(\omega + \omega_c) e^{-j\phi_c}] \\ &\quad + \frac{A_c}{2} \left[\underbrace{M_a(j\omega - j\omega_c)}_{\frac{a}{C_M} M(j\omega - j\omega_c)} e^{j\phi_c} + \underbrace{M_a(j\omega + j\omega_c)}_{\frac{a}{C_M} M(j\omega + j\omega_c)} e^{-j\phi_c} \right] \end{aligned}$$

Espectro de la señal AM Convencional - Análisis

- Módulo de la transformada de Fourier $S(j\omega)$
 - Dos deltas, en $-\omega_c$ y en $+\omega_c$
 - ★ Amplitud $A_c \pi$
 - Réplicas de la forma de $M(j\omega)$ desplazadas a $-\omega_c$ y $+\omega_c$
 - ★ Factor de escala $\frac{A_c a}{2 C_M}$
- Fase de la transformada de Fourier
 - La fase de la portadora introduce el término $e^{-j\phi_c}$
 - ★ Término de fase lineal
- Ancho de banda de la señal modulada

$$W_{AM} = 2 W \text{ rad/s}$$

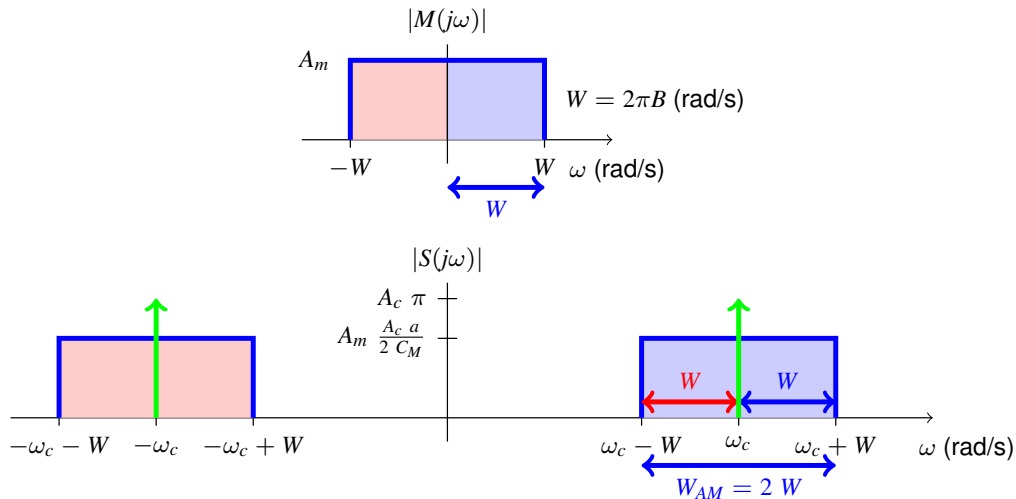
$$B_{AM} = 2 B \text{ Hz}$$

► Doble del ancho de banda de la señal moduladora $m(t)$

Espectro de la señal AM convencional - Representación

$$S(j\omega) = A_c \pi [\delta(\omega - \omega_c) e^{j\phi_c} + \delta(\omega + \omega_c) e^{-j\phi_c}] + \frac{A_c}{2} \left[\underbrace{M_a(j\omega - j\omega_c)}_{\frac{a}{C_M} M(j\omega - j\omega_c)} e^{j\phi_c} + \underbrace{M_a(j\omega + j\omega_c)}_{\frac{a}{C_M} M(j\omega + j\omega_c)} e^{-j\phi_c} \right]$$

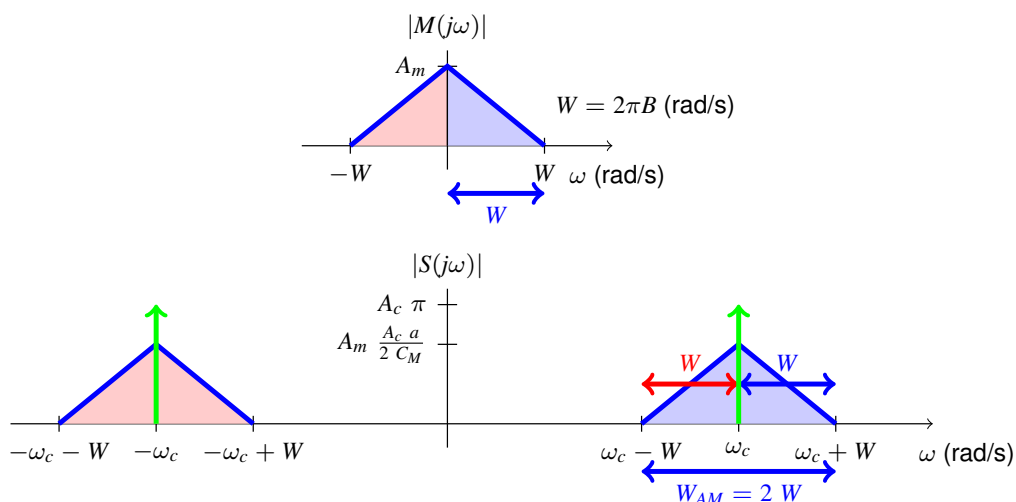
Un ejemplo para una $m(t)$ con una forma para $M(j\omega) = \mathcal{TF}\{m(t)\}$



Espectro de la señal AM convencional - Representación (II)

$$S(j\omega) = A_c \pi [\delta(\omega - \omega_c) e^{j\phi_c} + \delta(\omega + \omega_c) e^{-j\phi_c}] + \frac{A_c}{2} \left[\underbrace{M_a(j\omega - j\omega_c)}_{\frac{a}{C_M} M(j\omega - j\omega_c)} e^{j\phi_c} + \underbrace{M_a(j\omega + j\omega_c)}_{\frac{a}{C_M} M(j\omega + j\omega_c)} e^{-j\phi_c} \right]$$

Otro ejemplo para una $m(t)$ con otra forma para $M(j\omega) = \mathcal{TF}\{m(t)\}$



Análisis estadístico de AM convencional

- Modelo señal moduladora: proceso aleatorio

$$M(t), \text{ estacionario, con } m_M = 0, R_M(\tau), S_M(j\omega), P_M$$

- Definición de procesos normalizado y con índice de modulación

$$M_n(t) = \frac{1}{C_M} M(t) \quad M_a(t) = a M_n(t) = \frac{a}{C_M} M(t)$$

- Modelo de la señal modulada: proceso aleatorio

$$S(t) = A_c [1 + M_a(t)] \cos(\omega_c t + \phi_c)$$

- Media de la señal AM convencional

$$\begin{aligned} m_S(t) = E[S(t)] &= E \left[\underbrace{A_c [1 + M_a(t)] \cos(\omega_c t + \phi_c)}_{S(t)} \right] \\ &= A_c (1 + E[M_a(t)]) \cos(\omega_c t + \phi_c) \end{aligned}$$

- Si $M_a(t) = a M_n(t) = \frac{a}{C_M} M(t)$, $E[M_a(t)] = \frac{a}{C_M} E[M(t)] = 0$

$$m_S(t) = A_c \cos(\omega_c t + \phi_c)$$

Análisis estadístico de AM convencional (II)

- Modelo de la señal modulada: proceso aleatorio

$$S(t) = A_c [1 + M_a(t)] \cos(\omega_c t + \phi_c)$$

- Función de autocorrelación de la señal AM convencional

$$\begin{aligned} R_S(t + \tau, t) &= E[S(t + \tau) S(t)] \\ &= E \left[\underbrace{A_c [1 + M_a(t + \tau)] \cos(\omega_c(t + \tau) + \phi_c)}_{S(t + \tau)} \underbrace{A_c [1 + M_a(t)] \cos(\omega_c t + \phi_c)}_{S(t)} \right] \\ &= A_c^2 E \left[\underbrace{(1 + M_a(t + \tau))(1 + M_a(t))}_{1 + M_a(t) + M_a(t + \tau) + M_a(t + \tau) M_a(t)} \right] \cos(\omega_c(t + \tau) + \phi_c) \cos(\omega_c t + \phi_c) \end{aligned}$$

$$E[M_a(t)] = E[M_a(t + \tau)] = 0, E[M_a(t + \tau) M_a(t)] = R_{M_a}(\tau), \cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} \cos(a - b) + \frac{1}{2} \cos(a + b)$$

$$R_S(t + \tau, t) = \frac{A_c^2}{2} [1 + R_{M_a}(\tau)] [\cos(\omega_c \tau) + \cos(\omega_c(2t + \tau) + 2\phi_c)]$$

Análisis estadístico de AM convencional (III)

$$m_S(t) = A_c \cos(\omega_c t + \phi_c)$$

$$R_S(t + \tau, t) = \frac{A_c^2}{2} [1 + R_{M_a}(\tau)] [\cos(\omega_c \tau) + \cos(\omega_c(2t + \tau) + 2\phi_c)]$$

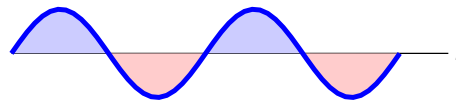
- Proceso **cicloestacionario** de período $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{1}{f_c}$

- ▶ Cálculo de la DEP: TF del promedio temporal de la función de autocorrelación

$$S_S(j\omega) = \mathcal{TF}\{\tilde{R}_S(\tau)\}, \text{ con } \tilde{R}_S(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} R_S(t + \tau, t) dt$$

- ★ Integral de una senoide en un número entero de períodos

$$\int_{n \times T_0} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \theta\right) dt = \int_{n \times T_0} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \theta\right) dt = 0$$



Análisis estadístico de AM convencional (IV)

- Promedio temporal de la función de autocorrelación

$$\begin{aligned} \tilde{R}_S(\tau) &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} R_S(t + \tau, t) dt \\ &= \frac{A_c^2}{2} [1 + R_{M_a}(\tau)] \cos(\omega_c \tau) = \frac{A_c^2}{2} \left[1 + \frac{a^2}{C_M^2} R_M(\tau) \right] \cos(\omega_c \tau) \\ &= \frac{A_c^2}{2} \cos(\omega_c \tau) + \frac{A_c^2}{2} \frac{a^2}{C_M^2} R_M(\tau) \cos(\omega_c \tau) \end{aligned}$$

$$\text{Si } M_a(t) = a M_n(t) = \frac{a}{C_M} M(t), \text{ entonces } m_{M_a}(t) = a m_{M_n}(t) = \frac{a}{C_M} m_M(t)$$

$$R_{M_a}(\tau) = a^2 R_{M_n}(\tau) = \frac{a^2}{C_M^2} R_M(\tau), \text{ y por tanto } S_{M_a}(j\omega) = \frac{a^2}{C_M^2} S_M(j\omega) \text{ y } P_{M_a} = \frac{a^2}{C_M^2} P_M$$

- Densidad espectral de potencia

$$\begin{aligned} S_S(j\omega) &= \mathcal{TF}\{\tilde{R}_S(\tau)\} = \frac{A_c^2}{2} \pi [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] \\ &\quad + \frac{A_c^2}{4} [S_{M_a}(j\omega - j\omega_c) + S_{M_a}(j\omega + j\omega_c)] \end{aligned}$$

$$S_S(j\omega) = \frac{A_c^2}{2} \pi [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] + \frac{A_c^2}{4} \left[\frac{a^2}{C_M^2} S_M(j\omega - j\omega_c) + \frac{a^2}{C_M^2} S_M(j\omega + j\omega_c) \right]$$

Análisis estadístico de AM convencional (V)

- Densidad espectral de potencia consta de:
 - ▶ Dos deltas, en $-\omega_c$ y en $+\omega_c$
 - ★ Amplitud $\frac{A_c^2}{2} \pi$
 - ▶ Réplicas de la forma de $S_M(j\omega)$ desplazadas a $-\omega_c$ y $+\omega_c$
 - ★ Factor de escala $\left(\frac{A_c a}{2 C_M}\right)^2$
- Potencia AM convencional

$$P_S = \tilde{R}_S(0) = \frac{A_c^2}{2} [1 + R_{M_a}(0)] = \frac{A_c^2}{2} [1 + P_{M_a}] = \frac{A_c^2}{2} \left[1 + \frac{a^2}{C_M^2} P_M\right] \text{ Watts}$$

- ▶ Potencia de la portadora: $\frac{A_c^2}{2} \text{ Watts}$
- ▶ Potencia de la DBL: $\left(\frac{A_c^2 a^2}{2 C_M^2}\right) \times P_M \text{ Watts}$

NOTA: la potencia también se puede calcular como $P_S = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_S(j\omega) d\omega$

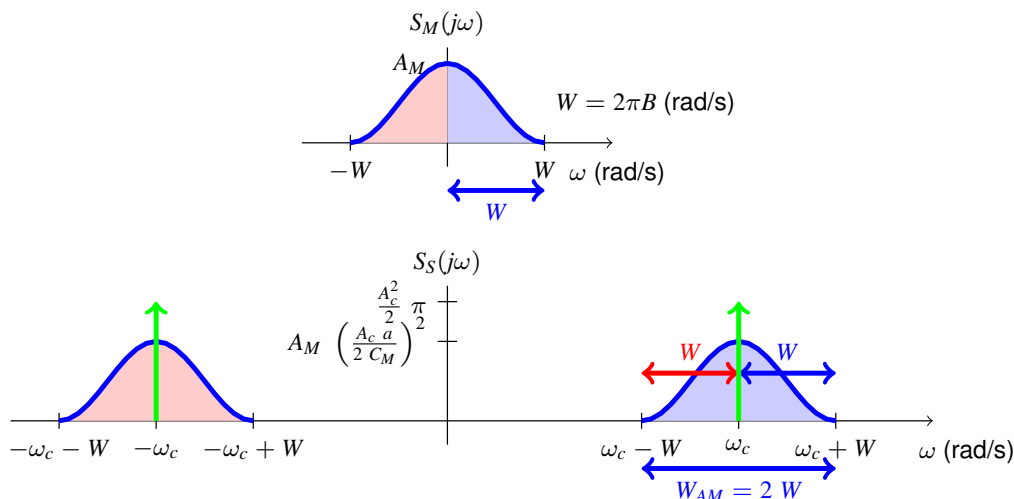
- Ancho de banda de la señal AM convencional

$$W_{AM} = 2 W \text{ rad/s}, \quad B_{AM} = 2 B \text{ Hz}$$

DEP de la señal AM convencional - Representación

$$S_S(j\omega) = \frac{A_c^2}{2} \pi [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] + \frac{A_c^2}{4} \left[\frac{a^2}{C_M^2} S_M(j\omega - j\omega_c) + \frac{a^2}{C_M^2} S_M(j\omega + j\omega_c) \right]$$

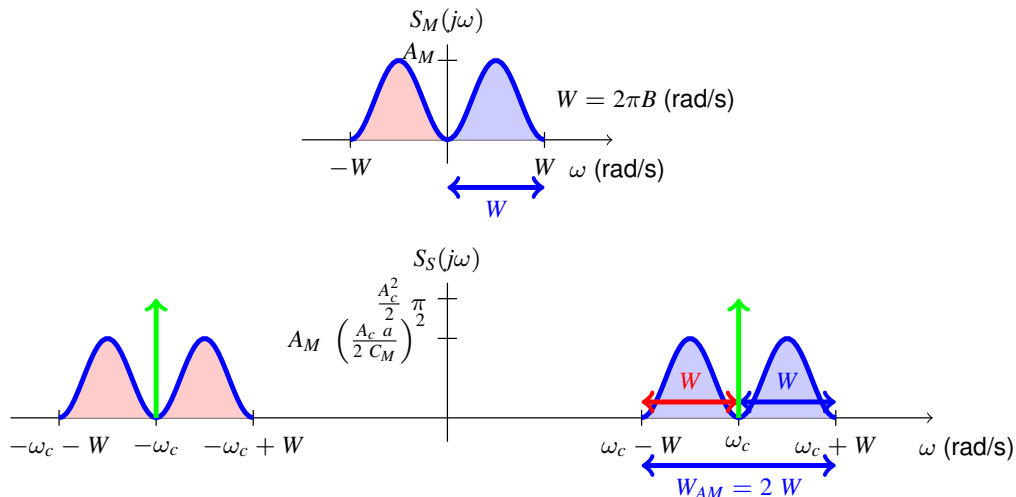
Un ejemplo para un proceso $M(t)$ con la siguiente $S_M(j\omega)$



DEP de la señal AM convencional - Representación (II)

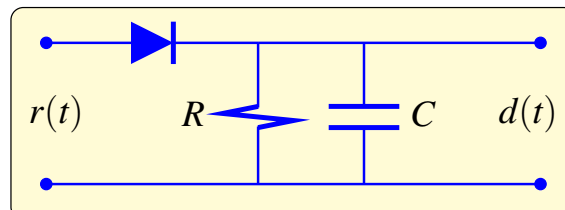
$$S_S(j\omega) = \frac{A_c^2}{2} \pi [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] + \frac{A_c^2}{4} \left[\frac{a^2}{C_M^2} S_M(j\omega - j\omega_c) + \frac{a^2}{C_M^2} S_M(j\omega + j\omega_c) \right]$$

Otro ejemplo para un proceso $M(t)$ con la siguiente $S_M(j\omega)$



Resumen de características de AM Convencional

- Inconvenientes de la modulación AM convencional:
 - ▶ Escasa eficiencia en potencia
 - ★ Se gasta potencia en la transmisión de la portadora (que no contiene información)
 - ▶ Escasa eficiencia espectral
 - ★ El ancho de banda de la señal modulada es el doble del de la moduladora
- Ventaja fundamental de la modulación AM convencional
 - ▶ Si $a \leq 1$, no hay sobremodulación y la envolvente de la señal es proporcional a $1 + m_a(t) \geq 0$
 - ★ Recuperación de $m(t)$: eliminación de la media y escalado
 - ▶ Receptor simple: detector de envolvente



- ★ No se necesita un demodulador síncrono (aunque se puede usar también y en realidad es el receptor óptimo)

Modulación de doble banda lateral sin portadora (DBL)

- Se suprime la portadora de la modulación AM convencional
 - ▶ Elimina el inconveniente de eficiencia en potencia de la AM convencional

$$s(t) = m(t) \times c(t) = m(t) \times A_c \cos(\omega_c t + \phi_c)$$

$$\text{AM-Conv. : } s(t) = c(t) + \frac{a}{C_M} \times m(t) \times c(t)$$

- Respuesta en frecuencia ($m(t)$ determinista con $M(j\omega) = \mathcal{TF}\{m(t)\}$)

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{TF}\{m(t)\} * \mathcal{TF}\{A_c \cos(\omega_c t + \phi_c)\} \\ &= \frac{A_c}{2} [M(j\omega - j\omega_c) e^{j\phi_c} + M(j\omega + j\omega_c) e^{-j\phi_c}] \end{aligned}$$

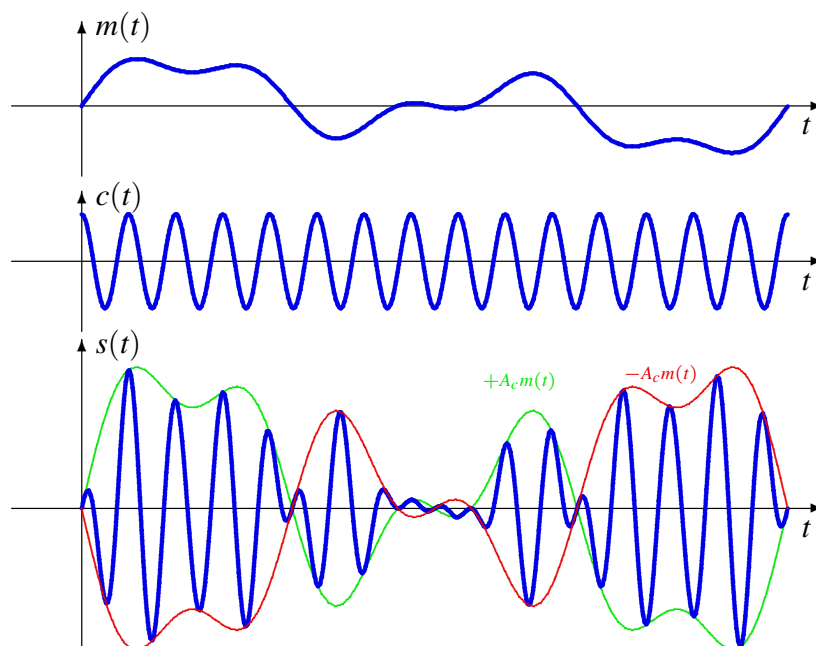
- ▶ Desaparecen las deltas de la modulación AM convencional
- ▶ Réplicas de $M(j\omega)$ en $\pm\omega_c$
 - ★ Cambia el escalado de las réplicas (al no haber normalización)
 - ★ Nombre: dos bandas laterales, inferior ($|w| < w_c$) y superior ($|w| > w_c$)

- Ancho de banda

$$W_{DBL} = 2 W \text{ rad/s}, \quad B_{DBL} = 2 B \text{ Hz}$$

Sigue siendo el doble que el de la señal moduladora que se transmite

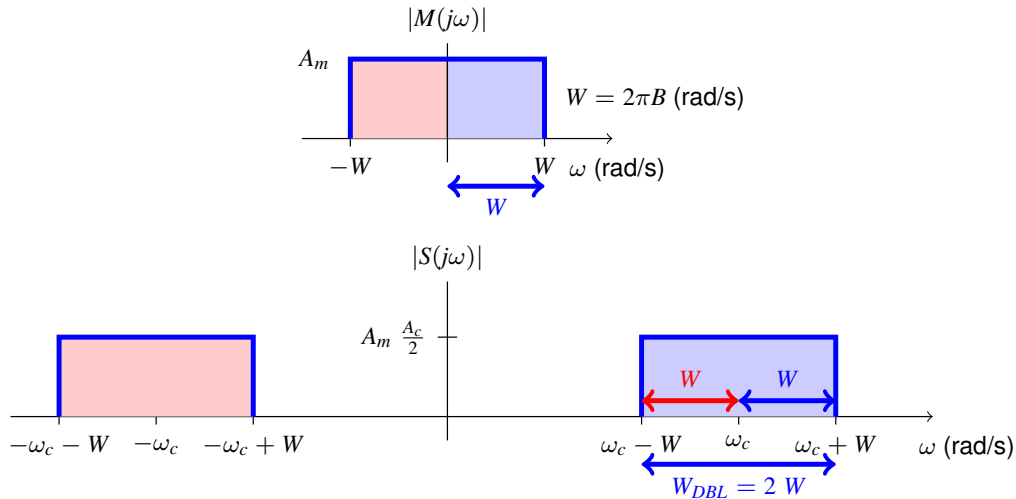
Forma de onda de una modulación AM DBL



Espectro de la señal AM DBL - Representación

$$S(j\omega) = \frac{A_c}{2} [M(j\omega - j\omega_c) e^{j\phi_c} + M(j\omega + j\omega_c) e^{-j\phi_c}]$$

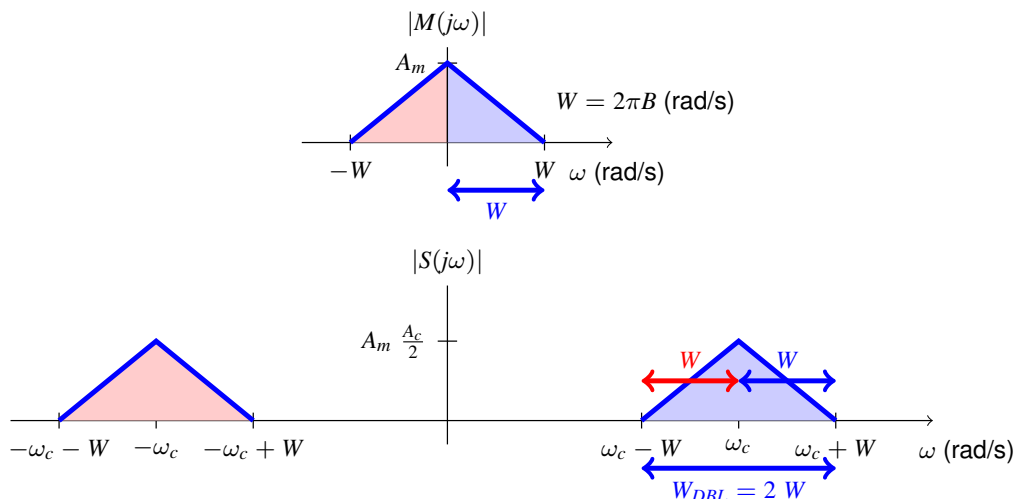
Un ejemplo para una $m(t)$ con una forma para $M(j\omega) = \mathcal{TF}\{m(t)\}$



Espectro de la señal AM DBL - Representación (II)

$$S(j\omega) = \frac{A_c}{2} [M(j\omega - j\omega_c) e^{j\phi_c} + M(j\omega + j\omega_c) e^{-j\phi_c}]$$

Otro ejemplo para una $m(t)$ con otra forma para $M(j\omega) = \mathcal{TF}\{m(t)\}$



Análisis estadístico de la modulación DBL

- Modelo de la señal moduladora: proceso aleatorio

$$M(t), \text{ estacionario, con } m_M = 0, R_M(\tau), S_M(j\omega)$$

- Modelo de la señal modulada: proceso aleatorio

$$S(t) = M(t) \times c(t) = A_c M(t) \cos(\omega_c t + \phi_c)$$

- Media señal modulada con DBL

$$m_S(t) = E[S(t)] = A_c E[M(t)] \cos(\omega_c t + \phi_c) = 0$$

- Función de autocorrelación de la señal DBL

$$\begin{aligned} R_S(t + \tau, t) &= A_c^2 E[M(t + \tau) M(t)] \cos(\omega_c(t + \tau) + \phi_c) \cos(\omega_c t + \phi_c) \\ &= \frac{A_c^2}{2} R_M(\tau) [\cos(\omega_c \tau) + \cos(\omega_c(2t + \tau) + 2\phi_c)] \end{aligned}$$

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} \cos(a - b) + \frac{1}{2} \cos(a + b)$$

- Proceso: **Cicloestacionario** de período $T_0 = \frac{2\pi}{2\omega_c} = \frac{1}{2f_c}$

Análisis estadístico de la modulación DBL (II)

- Promedio temporal de la función de autocorrelación

$$\tilde{R}_S(\tau) = \frac{1}{T} \int_{T_0} R_S(t + \tau, t) dt = \frac{A_c^2}{2} R_M(\tau) \cos(\omega_c \tau)$$

- Densidad espectral de potencia

$$S_S(j\omega) = \mathcal{TF}\{\tilde{R}_S(\tau)\} = \frac{A_c^2}{4} [S_M(j\omega - j\omega_c) + S_M(j\omega + j\omega)]$$

- Potencia de la señal DBL

$$P_S = \tilde{R}_S(0) = \frac{A_c^2}{2} R_M(0) = \frac{A_c^2}{2} P_M$$

- Eficiente en potencia

★ Sin portadora : no se "malgasta" potencia en términos que no contienen información

- Ancho de banda de la modulación DBL

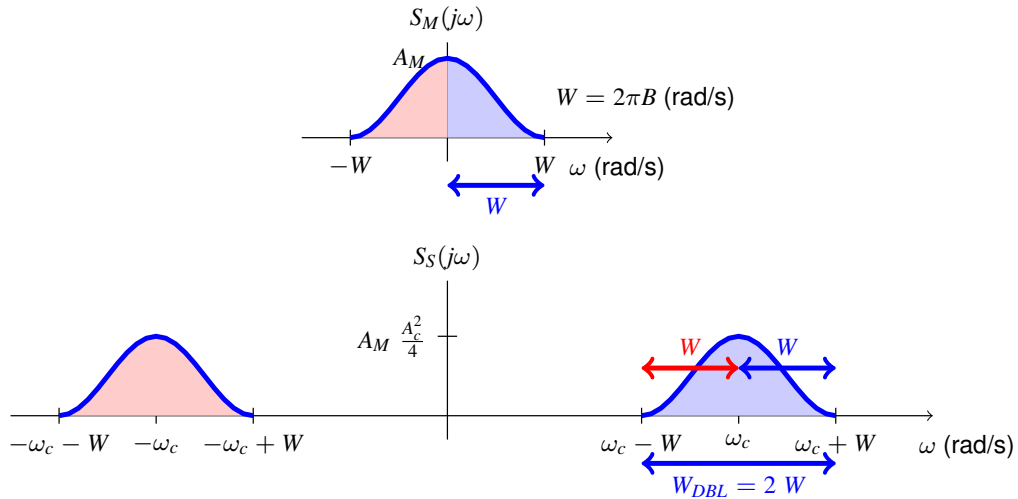
$$W_{DBL} = 2 W \text{ rad/s}, \quad B_{DBL} = 2 B \text{ Hz}$$

- Sigue siendo el doble que el de la señal moduladora

DEP de la señal DBL - Representación

$$S_S(j\omega) = \frac{A_c^2}{4} [S_M(j\omega - j\omega_c) + S_M(j\omega + j\omega_c)]$$

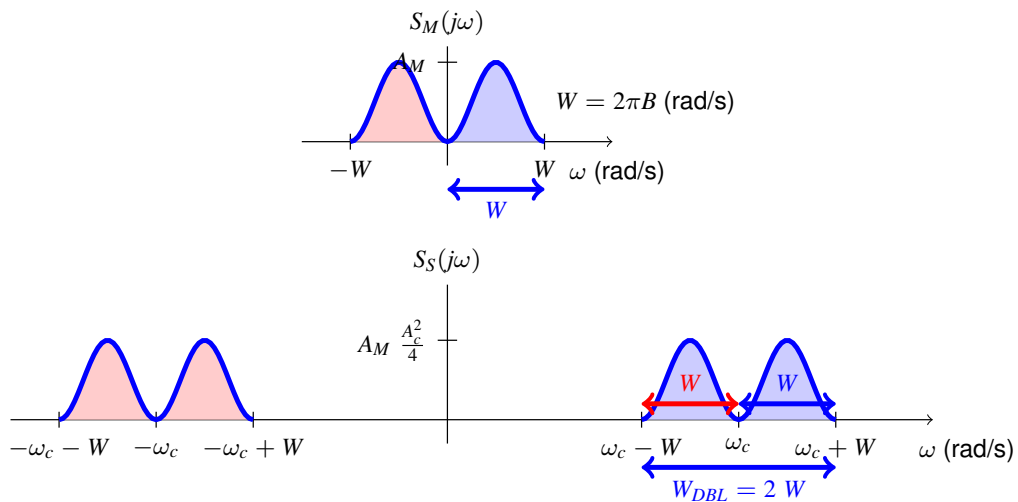
Un ejemplo para un proceso $M(t)$ con la siguiente $S_M(j\omega)$



DEP de la señal DBL - Representación (II)

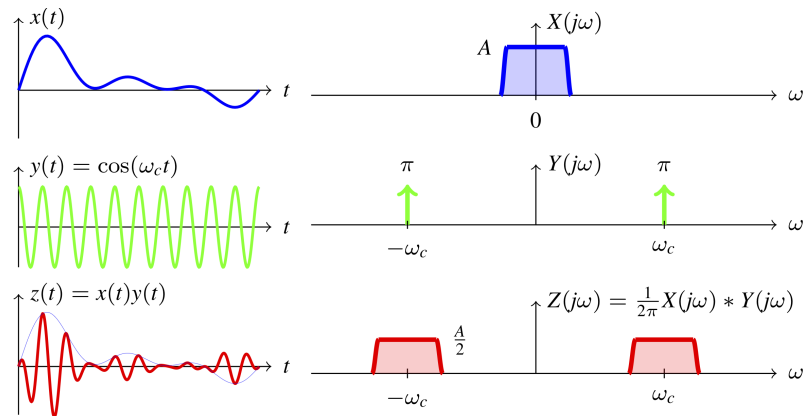
$$S_S(j\omega) = \frac{A_c^2}{4} [S_M(j\omega - j\omega_c) + S_M(j\omega + j\omega_c)]$$

Otro ejemplo para un proceso $M(t)$ con la siguiente $S_M(j\omega)$



Revisión : Producto por una senoide - Efecto en frecuencia

- Senoide de frecuencia ω_c : dos réplicas de la forma del espectro de la señal modulada, desplazadas $\pm\omega_c$



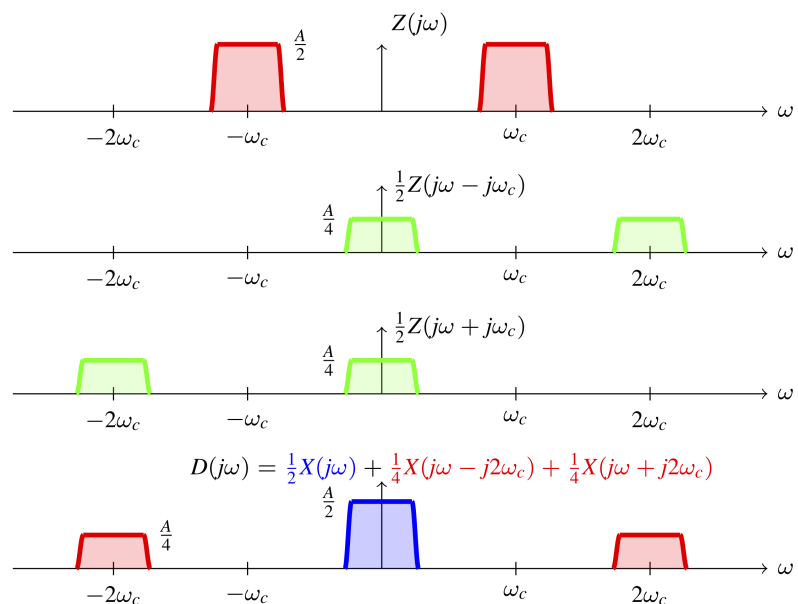
$$z(t) = x(t) \cos(\omega_c t) \xleftrightarrow{\mathcal{TF}} Z(j\omega) = \frac{1}{2}X(j\omega - j\omega_c) + \frac{1}{2}X(j\omega + j\omega_c)$$

- Densidad espectral de potencia (para señales aleatorias)

$$S_Z(j\omega) = \frac{1}{4}S_X(j\omega - j\omega_c) + \frac{1}{4}S_X(j\omega + j\omega_c)$$

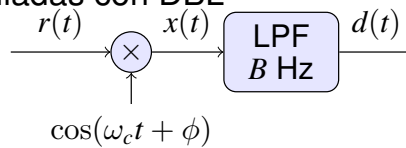
Producto por una senoide - Efecto en frecuencia (II)

$$d(t) = z(t) \cos(\omega_c t) \xleftrightarrow{\mathcal{TF}} D(j\omega) = \frac{1}{2}Z(j\omega - j\omega_c) + \frac{1}{2}Z(j\omega + j\omega_c)$$



Demodulación señales DBL : Receptor síncrono o coherente

- Receptor para señales moduladas con DBL



LPF: filtro paso bajo (ancho de banda de B Hz)

- ▶ Demodulador (multiplicar por la portadora $\cos(\omega_c t + \phi)$)
- ▶ Filtro paso bajo (ancho de banda dado por la señal, B Hz)

- Rendimiento óptimo con un receptor síncrono o coherente

- ▶ Misma fase en la portadora del receptor que en la del transmisor

$$\phi = \phi_c$$

- Efecto de un receptor no síncrono ($\phi \neq \phi_c$)

- ▶ Atenuación del término relacionado con la señal $m(t)$
- ▶ Pérdida de relación señal a ruido (prestaciones)
 - ★ El valor de la fase ϕ no varía la potencia debida al término de ruido

Efecto de un receptor no coherente

- Análisis del término de señal (Se asume $r(t) = s(t) = A_c m(t) \cos(\omega_c t + \phi_c)$)
- Señal demodulada sin filtrar

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) \times \cos(\omega_c t + \phi) \\ &= A_c m(t) \cos(\omega_c t + \phi_c) \cos(\omega_c t + \phi) \\ &= \frac{A_c}{2} m(t) [\cos(\phi - \phi_c) + \cos(2\omega_c t + \phi_c + \phi)] \end{aligned}$$

- Señal demodulada filtrada

- ▶ Se eliminan los términos con espectro en $\pm 2\omega_c$

$$d(t) = \frac{A_c}{2} m(t) \cos(\phi - \phi_c)$$

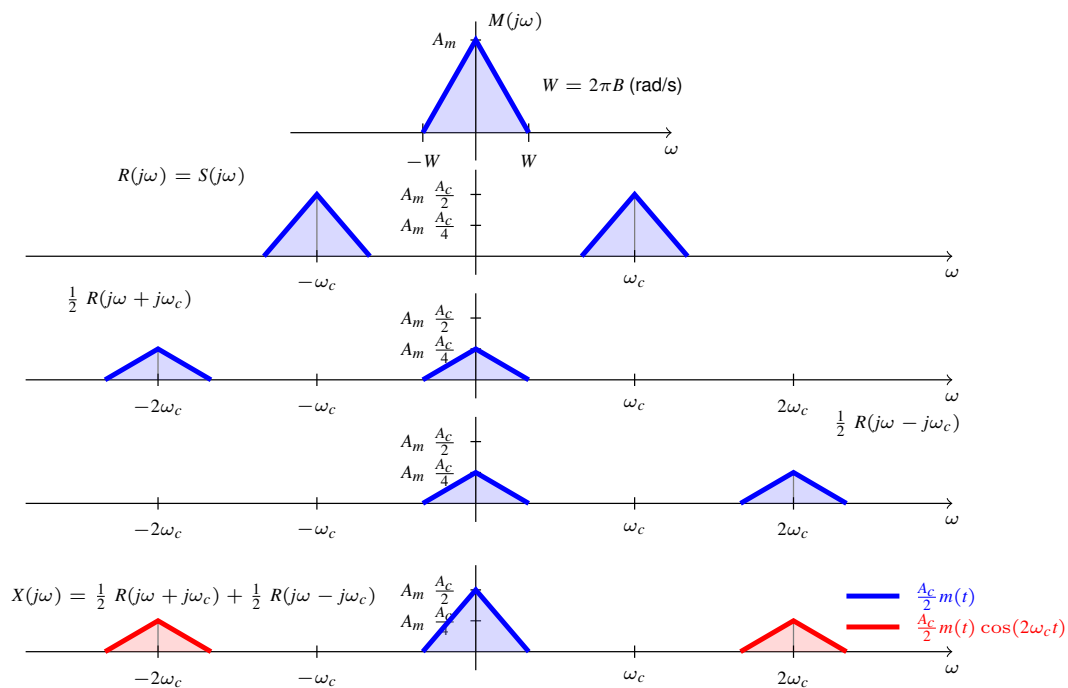
- ▶ Valor ideal, con receptor coherente ($\phi = \phi_c$)

$$d(t) = \frac{A_c}{2} m(t)$$

- ▶ Efecto de utilizar un receptor no coherente ($\phi \neq \phi_c$)
 - ★ Término de atenuación

$$\cos(\phi - \phi_c)$$

Demodulación síncrona - Interpretación frecuencial

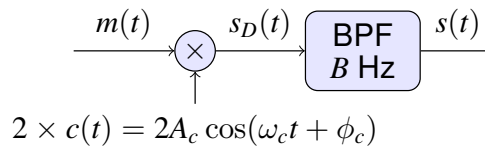


Receptor coherente - Posibles opciones

- El receptor debe identificar la fase de la portadora con que se moduló la señal $\phi = \phi_c$
- Opciones más frecuentes
 - ▶ Transmisión de un piloto (portadora de amplitud reducida)
 - ★ Ineficiencia en potencia
 - ▶ Utilización de un lazo enganchado en fase (PLL: *Phase Locked Loop*)
 - ★ Incrementa el coste del receptor

Modulación de banda lateral única (BLU)

- Eficiencia espectral: $B_{BLU} = B$ Hz
 - ▶ Se elimina una de las dos bandas laterales
- Generación de la señal mediante filtrado directo
 - ▶ Se genera una señal de doble banda lateral (con amplitud doble)
 - ▶ Se elimina una de las dos bandas laterales mediante filtrado
 - ★ BLU de banda lateral superior (BLS): se eliminan las frecuencias $|\omega| < \omega_c$
 - ★ BLU de banda lateral inferior (BLI): se eliminan las frecuencias $|\omega| > \omega_c$



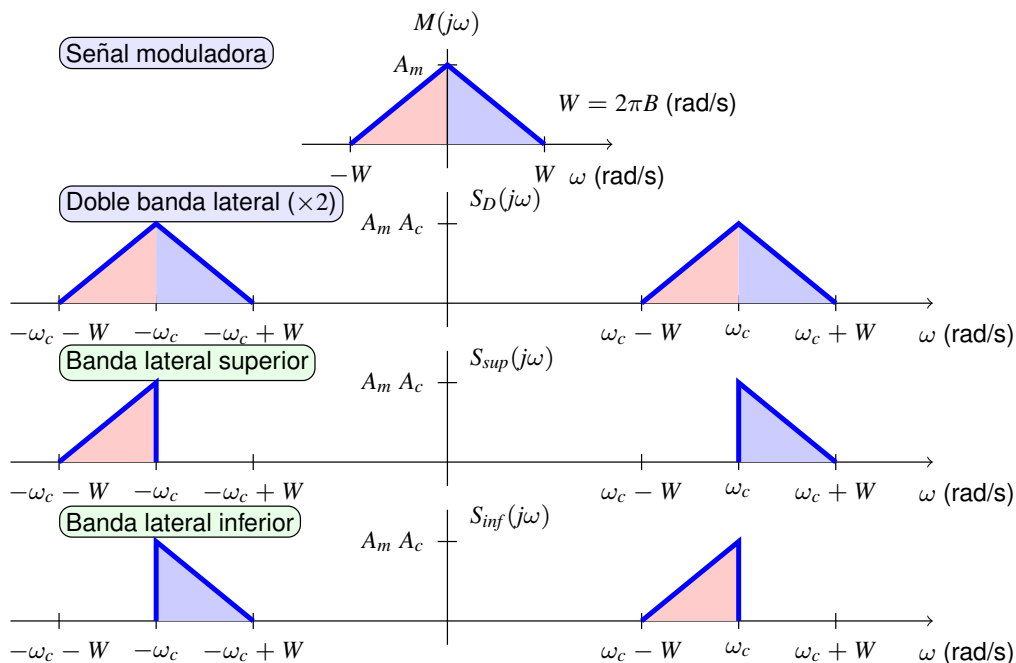
- Expresión analítica de la señal BLU resultante

$$s(t) = A_c m(t) \cos(\omega_c t + \phi_c) \mp A_c \hat{m}(t) \sin(\omega_c t + \phi_c)$$

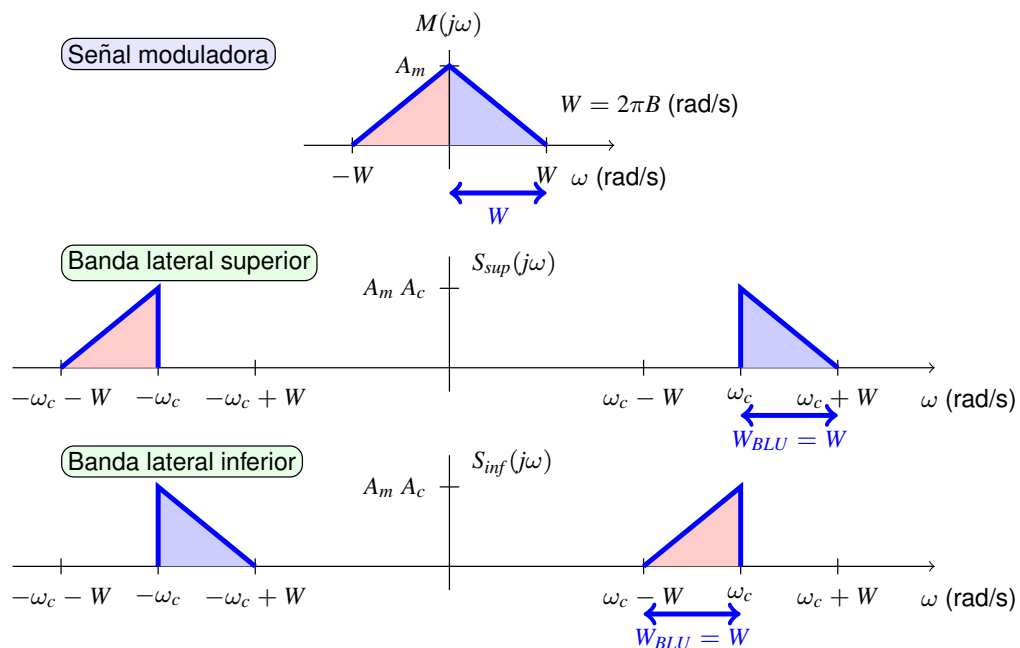
$\hat{m}(t)$: transformada de Hilbert de la señal moduladora $m(t)$

- ▶ Banda lateral superior (BLS): signo $-$
- ▶ Banda lateral inferior (BLI): signo $+$

Espectro de la señal AM de BLU



Espectro de la señal AM de BLU - Ancho de banda



Transformada de Hilbert

- Señal generada filtrando con un transformador de Hilbert

$$\hat{m}(t) = m(t) * h_{Hilbert}(t)$$

- Transformador de Hilbert:

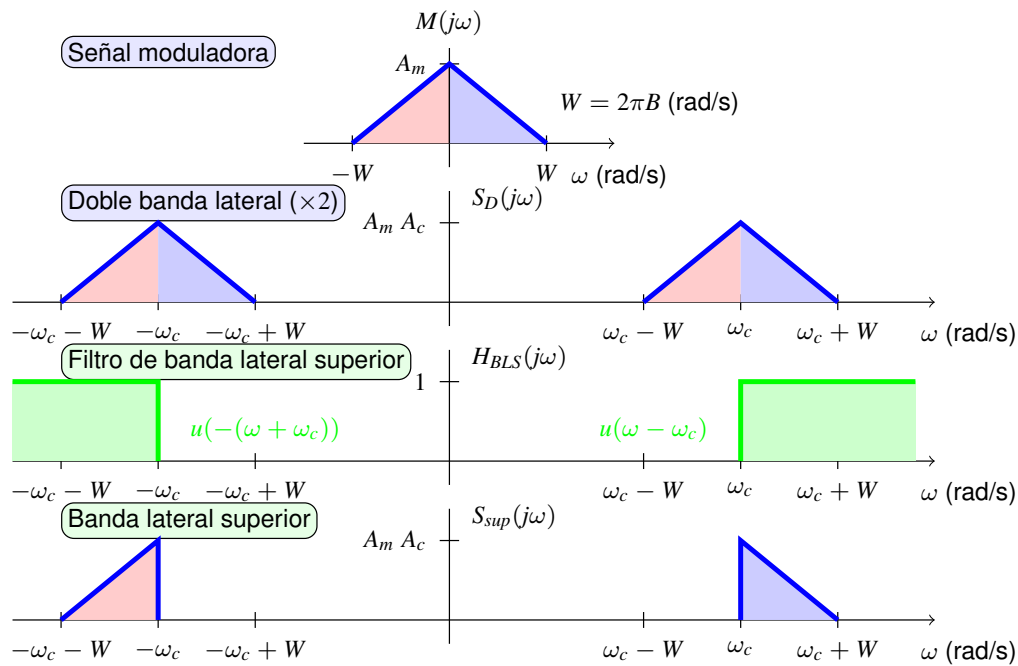
- ▶ Respuesta al impulso

$$h_{Hilbert}(t) = \frac{1}{\pi t}$$

- ▶ Respuesta en frecuencia

$$H_{Hilbert}(j\omega) = \begin{cases} -j, & \omega > 0 \\ +j, & \omega < 0 \\ 0, & \omega = 0 \end{cases}$$

Generación de BLU de banda lateral superior



Expresión analítica de $s(t)$ - Banda lateral superior

- Respuesta en frecuencia del filtro de banda lateral superior:

$$H_{BLS}(j\omega) = u(\omega - \omega_c) + u(-(\omega + \omega_c)) \text{ con } u(x) \text{ función escalón}$$

- Espectro de la señal DBL con amplitud doble, $S_D(j\omega)$

$$S_D(j\omega) = A_c [M(j\omega - j\omega_c) + M(j\omega + j\omega_c)]$$

- Espectro de la señal BLU con banda lateral superior

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= S_D(j\omega) H_{BLS}(j\omega) \\ &= A_c M(j\omega) u(\omega) |_{\omega=\omega-\omega_c} + A_c M(j\omega) u(-\omega) |_{\omega=\omega+\omega_c} \end{aligned}$$

Se utilizan las siguientes propiedades de la transformada de Fourier y las fórmulas de Euler para sinusoides

$$\mathcal{TF} \left\{ \frac{1}{2} \delta(t) + \frac{j}{2\pi t} \right\} = u(\omega), \quad \mathcal{TF} \left\{ \frac{1}{2} \delta(t) - \frac{j}{2\pi t} \right\} = u(-\omega), \quad \mathcal{TF} \{x(t) e^{j\omega_c t}\} = X(j\omega - j\omega_c)$$

$$\cos(\omega_c t) = \frac{e^{+j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}}{2}, \quad \sin(\omega_c t) = \frac{e^{+j\omega_c t} - e^{-j\omega_c t}}{2j} = j \frac{e^{-j\omega_c t} - e^{+j\omega_c t}}{2}$$

- Señal BLU de banda lateral superior

$$\begin{aligned} s(t) &= A_c m(t) * \left[\frac{1}{2} \delta(t) + \frac{j}{2\pi t} \right] e^{j\omega_c t} + A_c m(t) * \left[\frac{1}{2} \delta(t) - \frac{j}{2\pi t} \right] e^{-j\omega_c t} \\ &= \frac{A_c}{2} [m(t) + j\hat{m}(t)] e^{j\omega_c t} + \frac{A_c}{2} [m(t) - j\hat{m}(t)] e^{-j\omega_c t} \\ &= A_c m(t) \cos(\omega_c t) - A_c \hat{m}(t) \sin(\omega_c t) \end{aligned}$$

Expresión analítica de $s(t)$ - Banda lateral inferior

- Señal BLU de banda lateral superior

$$s_{sup}(t) = A_c m(t) \cos(\omega_c t) - A_c \hat{m}(t) \sin(\omega_c t)$$

- Relaciones de las dos señales BLU y señal $s_D(t)$

$$s_D(t) = 2 A_c m(t) \cos(\omega_c t) = s_{sup}(t) + s_{inf}(t)$$

- Señal BLU de banda lateral inferior

$$s_{inf}(t) = s_D(t) - s_{sup}(t)$$

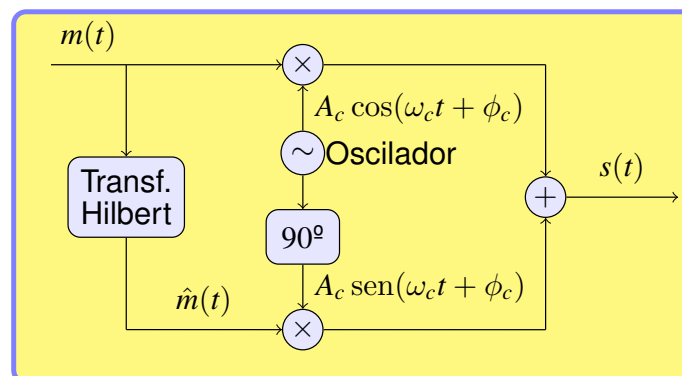
$$s_{inf}(t) = A_c m(t) \cos(\omega_c t) + A_c \hat{m}(t) \sin(\omega_c t)$$

Generación alternativa de BLU - Modulador de Hartley

- Implementación basada en la expresión analítica a partir de la transformada de Hilbert

$$s(t) = A_c m(t) \cos(\omega_c t + \phi_c) \mp A_c \hat{m}(t) \sin(\omega_c t + \phi_c)$$

NOTA: para simplificar la notación, anteriormente se había considerado $\phi_c = 0$



Ancho de banda y potencia de una BLU

- Densidad espectral de potencia

- ▶ Banda lateral superior

$$S_{S_{sup}}(j\omega) = \begin{cases} A_c^2 [S_M(j\omega - j\omega_c) + S_M(j\omega + j\omega_c)], & |\omega| > \omega_c \\ 0, & |\omega| < \omega_c \end{cases}$$

- ▶ Banda lateral inferior

$$S_{S_{inf}}(j\omega) = \begin{cases} 0, & |\omega| > \omega_c \\ A_c^2 [S_M(j\omega - j\omega_c) + S_M(j\omega + j\omega_c)], & |\omega| < \omega_c \end{cases}$$

- Potencia de la señal

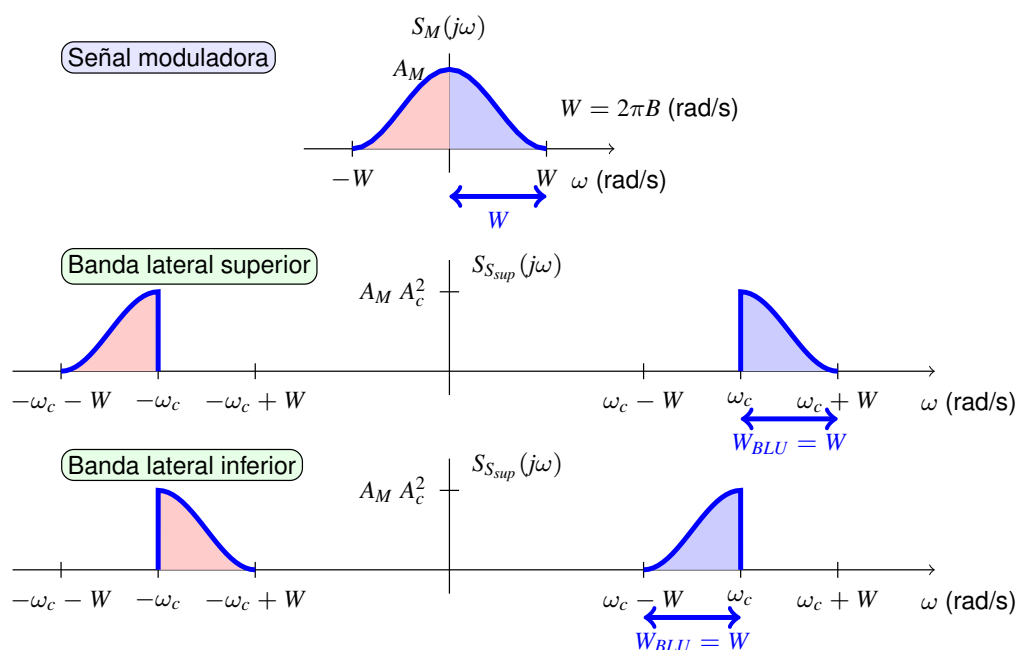
$$P_S = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_S(j\omega) d\omega = A_c^2 P_M$$

- Ancho de banda

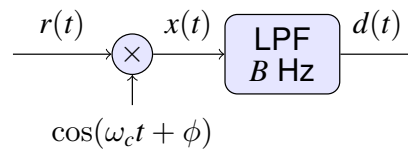
$$W_{BLU} = W \text{ rad/s}, \quad B_{BLU} = B \text{ Hz}$$

Mismo ancho de banda que el de la señal moduladora transmitida

DEP de la señal AM de BLU - Representación



Demodulación coherente (síncrona) de señales BLU



- Señal recibida

$$r(t) = s(t) = A_c m(t) \cos(\omega_c t + \phi_c) \mp A_c \hat{m}(t) \sin(\omega_c t + \phi_c)$$

Recuerde: por simplicidad en la notación se supuso $\phi_c = 0$ (ahora fase genérica ϕ_c)

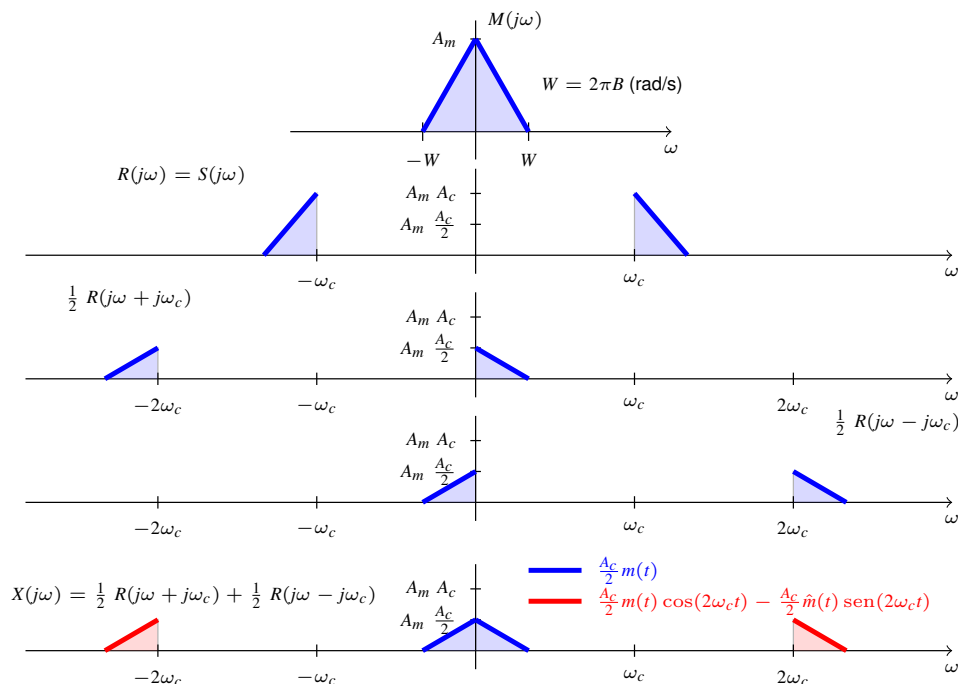
- Señal demodulada sin filtrar $x(t)$

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) \times \cos(\omega_c t + \phi) \\ &= [A_c m(t) \cos(\omega_c t + \phi_c) \mp A_c \hat{m}(t) \sin(\omega_c t + \phi_c)] \times \cos(\omega_c t + \phi) \\ &= \frac{1}{2} A_c m(t) \cos(\phi - \phi_c) \pm \frac{1}{2} A_c \hat{m}(t) \sin(\phi - \phi_c) \\ &\quad + \frac{1}{2} A_c m(t) \cos(2\omega_c t + \phi + \phi_c) \mp \frac{1}{2} A_c \hat{m}(t) \sin(2\omega_c t + \phi + \phi_c) \end{aligned}$$

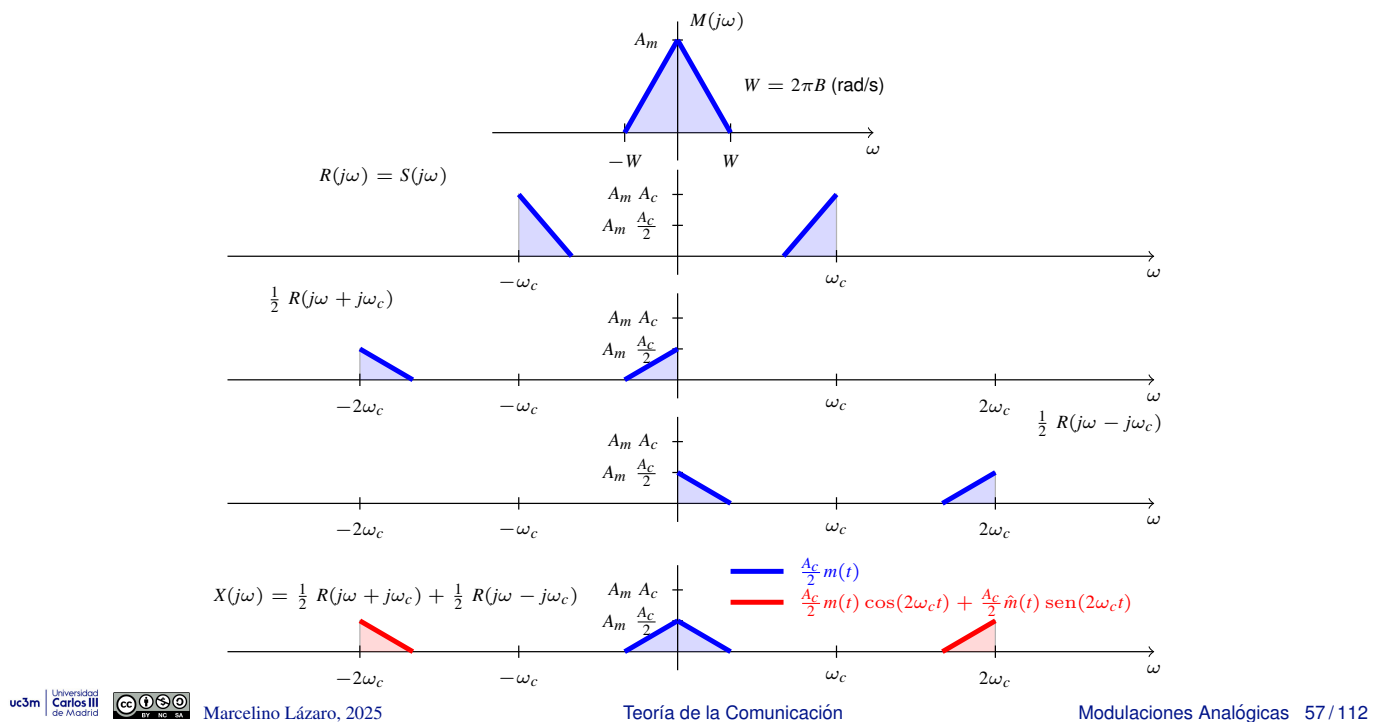
- Señal demodulada filtrada

$$d(t) = \frac{1}{2} A_c m(t) \cos(\phi - \phi_c) \pm \frac{1}{2} A_c \hat{m}(t) \sin(\phi - \phi_c)$$

Demodulación síncrona de BLU (BLS) - Interpretación frecuencial



Demodulación síncrona de BLU (BLI) - Interpretación frecuencial



Demodulación de señales BLU (II)

- Señal demodulada filtrada (con fase ϕ_c arbitraria no nula)

$$d(t) = \frac{1}{2} A_c m(t) \cos(\phi - \phi_c) \pm \frac{1}{2} A_c \hat{m}(t) \sin(\phi - \phi_c)$$

- Efectos negativos presentes con demoduladores no coherentes

- ▶ Atenuación del término de señal recibida debido a $m(t)$

$$\frac{A_c}{2} m(t) \cos(\phi - \phi_c), \text{ término de atenuación } \cos(\phi - \phi_c)$$

- ★ Igual que para modulación de doble banda lateral

- ▶ Término adicional de distorsión

$$\pm \frac{A_c}{2} \hat{m}(t) \sin(\phi - \phi_c), \text{ término de ganancia } \sin(\phi - \phi_c)$$

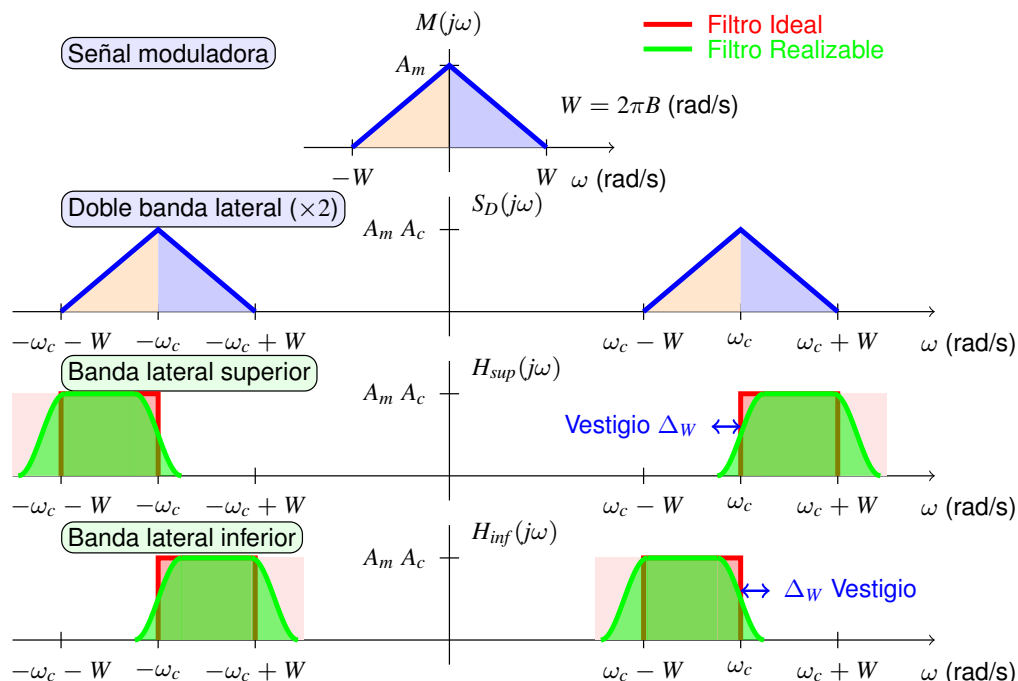
- ★ Situación peor que para modulación de doble banda lateral

- Necesidad de demodulador síncrono o coherente

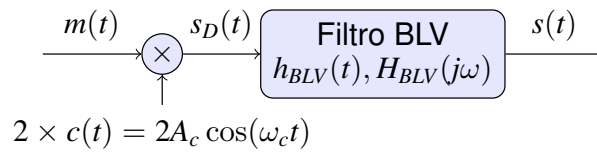
Características de la modulación de banda lateral única

- La modulación BLU supera los dos principales inconvenientes de la modulación AM convencional
 - ▶ Eficiencia espectral
 - ★ Mismo ancho de banda que el de la señal de información (moduladora) que se transmite
 - ▶ Eficiencia en potencia
 - ★ Toda la potencia de la señal está asociada a la componente que contiene la información (no se utiliza energía para transmitir una portadora)
- Inconveniente de la modulación BLU
 - ▶ Implementación mediante filtrado directo requiere filtros ideales para eliminar una de las bandas laterales
 - ★ La implementación con filtros reales puede generar distorsión en la señal transmitida
 - ▶ Implementación con modulador de Hartley requiere transformador de Hilbert
 - ★ Respuesta ideal del transformador (no realizable sin error)

BLU a BLV : De filtros ideales a filtros realizables



Modulación de banda lateral vestigial (BLV)



- Mismo esquema de modulación que BLU
 - ▶ Se reemplaza el filtro “ideal” de BLU por un filtro realizable
 - ★ Filtro de banda lateral vestigial (que deberá cumplir ciertas condiciones)
- Señal modulada BLV
 - ▶ Se filtra una señal de doble banda lateral de amplitud doble $s_D(t)$ con un filtro de banda lateral vestigial

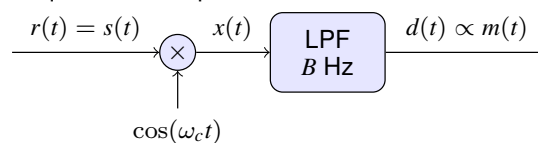
$$s(t) = \left[\underbrace{m(t) \times 2A_c \cos(\omega_c t)}_{s_D(t)} \right] * h_{BLV}(t)$$

- Señal BLV en el dominio de la frecuencia

$$S(j\omega) = A_c [M(j\omega - j\omega_c) + M(j\omega + \omega_c)] H_{BLV}(j\omega)$$

Características que debe tener el filtro BLV

- Se analizará la señal recibida y su dependencia con el filtro
 - ▶ Obtención de las condiciones que debe cumplir



- Señal recibida (igual a la transmitida) en el dominio frecuencial

$$R(j\omega) = S(j\omega) = A_c [M(j\omega - j\omega_c) + M(j\omega + \omega_c)] H_{BLV}(j\omega)$$

- Señal demodulada (sin filtrar) en el dominio frecuencial

$$x(t) = r(t) \cos(\omega_c t) \rightarrow X(j\omega) = \frac{1}{2} [R(j\omega - j\omega_c) + R(j\omega + j\omega_c)]$$

$$X(j\omega) = \frac{A_c}{2} [M(j\omega - j2\omega_c) + M(j\omega)] H_{BLV}(j\omega - j\omega_c) + \frac{A_c}{2} [M(j\omega) + M(j\omega + j2\omega_c)] H_{BLV}(j\omega + j\omega_c)$$

- Señal demodulada filtrada en el dominio frecuencial

$$D(j\omega) = \frac{A_c}{2} M(j\omega) [H_{BLV}(j\omega - j\omega_c) + H_{BLV}(j\omega + j\omega_c)]$$

Características que debe tener el filtro BLV (II)

- Señal demodulada filtrada en el dominio frecuencial

$$D(j\omega) = \frac{A_c}{2} M(j\omega) [H_{BLV}(j\omega - j\omega_c) + H_{BLV}(j\omega + j\omega_c)]$$

- Interpretación: la señal moduladora se filtra con el filtro equivalente

$$H_{EQ}(j\omega) = H_{BLV}(j\omega - j\omega_c) + H_{BLV}(j\omega + j\omega_c)$$

- El filtro ha de tener una respuesta que en la banda de la señal ($|\omega| \leq 2\pi B$ rad/s) cumpla
 - Módulo constante
 - Fase lineal
- Por tanto, las condiciones que debe cumplir el filtro BLV son

$$|H_{BLV}(j\omega - j\omega_c) + H_{BLV}(j\omega + j\omega_c)| = \text{cte, en } |\omega| \leq 2\pi B \text{ rad/s}$$

$$\text{Simetría impar respecto a } \omega_c \text{ en } \omega_c - \Delta_W < \omega < \omega_c + \Delta_W \text{ rad/s}$$

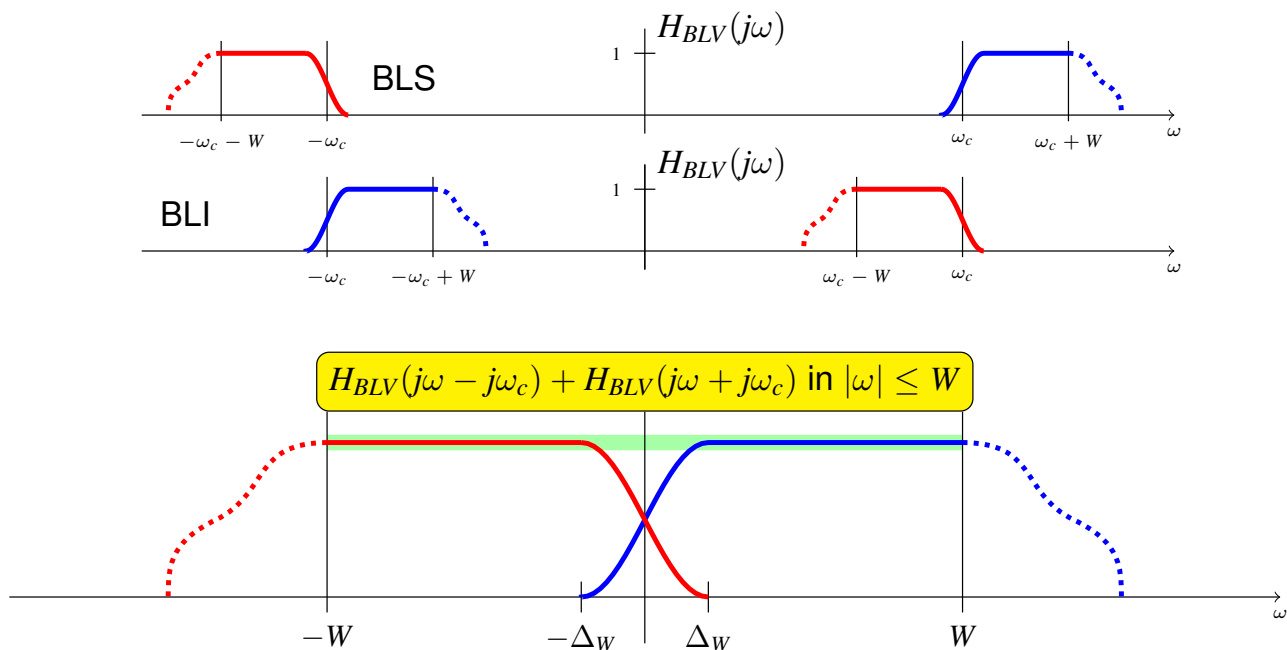
Δ_W : exceso de ancho de banda (vestigio) en radianes/s

- Ancho de banda de la señal modulada

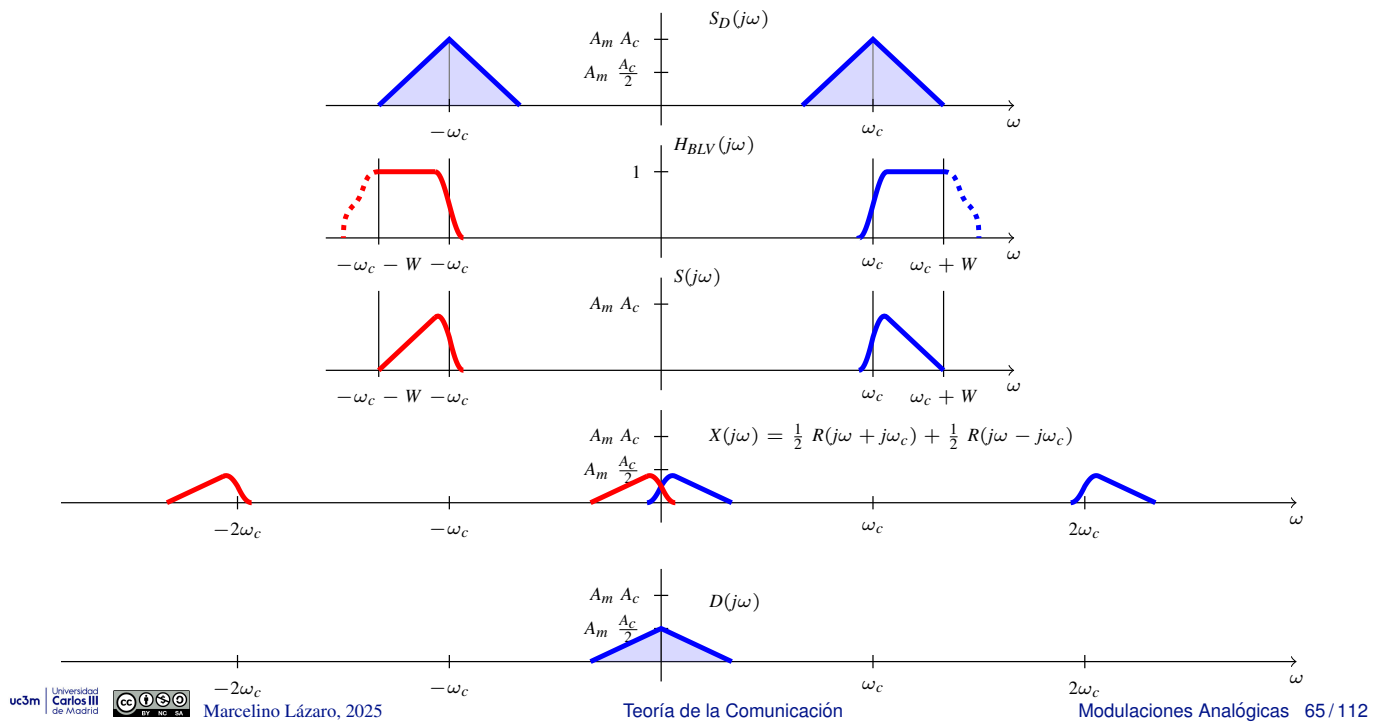
$$W_{BLV} = W + \Delta_W \text{ rad/s, o } B_{BLV} = B + \Delta_B \text{ Hz, con } \Delta_B = \frac{\Delta_W}{2\pi}$$

Δ_B : exceso de ancho de banda vestigial en Hz (habitualmente $\Delta_B \ll B$)

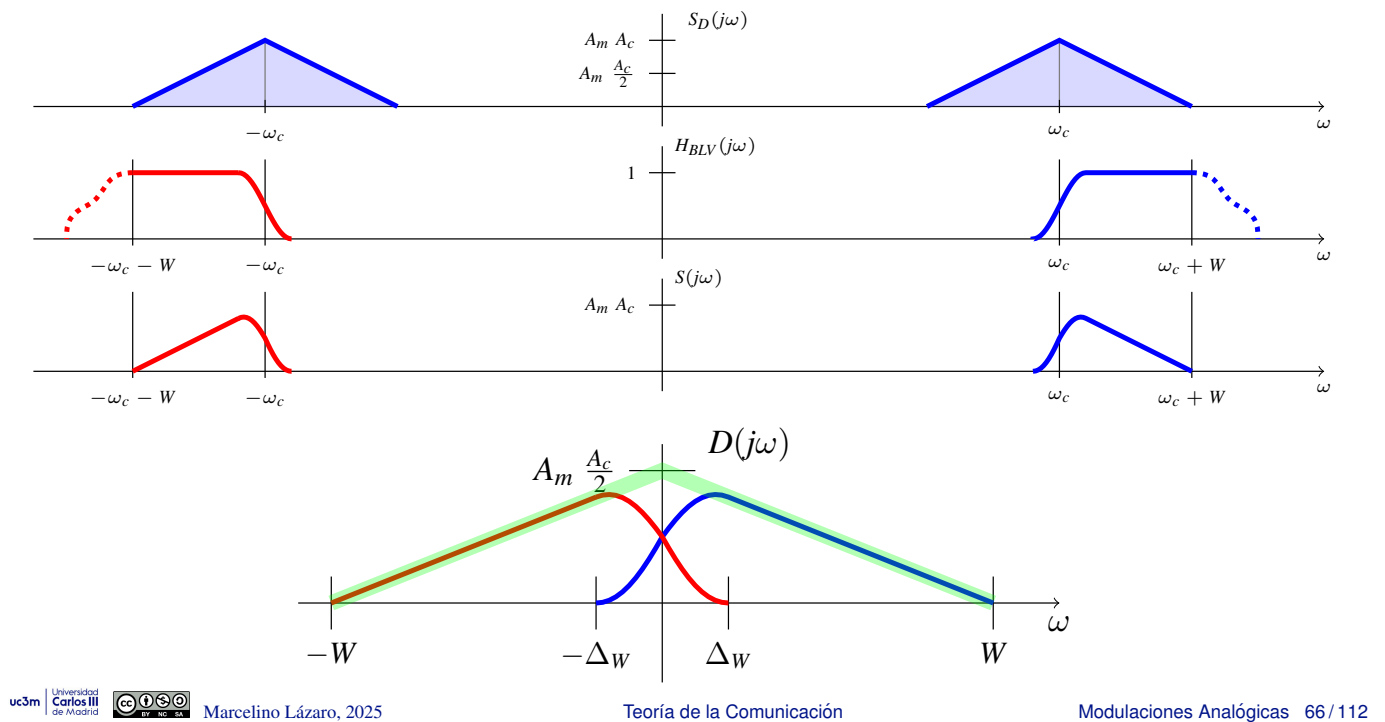
Filtro BLV



Demodulación síncrona de BLV (BLS) - Interpretación frecuencia



Demodulación síncrona de BLV (BLU) - Interpretación frecuencia



Modulaciones de amplitud - Resumen características

Modulación	BW (Hz)	P_S	$P_S(m(t))$	$d(t)$	$P_d(m(t))$
AM convencional	$2B$	$\frac{A_c^2}{2} [1 + P_{Ma}]$	$\frac{A_c^2}{2} P_{Ma}$	$\frac{A_c}{2} [1 + m_a(t)]$	$\frac{A_c^2}{4} P_{Ma}$
DBL	$2B$	$\frac{A_c^2}{2} P_M$	$\frac{A_c^2}{2} P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$
BLU	B	$A_c^2 P_M$	$A_c^2 P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$
BLV	$B + \Delta_B$	$A_c^2 P_M$	$A_c^2 P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$

BW (Hz) : ancho de banda de la señal modulada en Hz

P_S : potencia de la señal modulada

$P_S(m(t))$: potencia de la señal modulada relativa al término relacionado con $m(t)$

$d(t)$: señal recuperada con un receptor síncrono o coherente

$P_d(m(t))$: potencia de la señal demodulada relativa al término relacionado con $m(t)$

- Eficiencia en potencia

- ▶ Toda la potencia de la señal está relacionada con $m(t)$

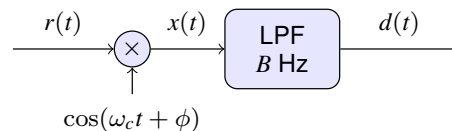
- ★ DBL, BLU y BLV

- Eficiencia espectral

- ▶ Mínimo ancho de banda para la transmisión (mismo ancho de banda que la señal moduladora, B Hz)

- ★ BLU y BLV (en este caso con un incremento vestigial Δ_B)

Demodulación síncrona de modulación AM convencional



- Señal recibida: AM convencional $r(t) = s(t) = A_c [1 + m_a(t)] \cos(\omega_c t + \phi_c)$

- Señal demodulada sin filtrar $x(t)$

$$\begin{aligned}
 x(t) &= r(t) \times \cos(\omega_c t + \phi) \\
 &= A_c [1 + m_a(t)] \cos(\omega_c t + \phi_c) \times \cos(\omega_c t + \phi) \\
 &= \frac{A_c}{2} [1 + m_a(t)] \cos(\phi_c - \phi) + \frac{A_c}{2} [1 + m_a(t)] \cos(2\omega_c t + \phi_c + \phi)
 \end{aligned}$$

- Señal demodulada filtrada

$$d(t) = \frac{A_c}{2} [1 + m_a(t)] \cos(\phi_c - \phi)$$

- Necesidad de demodulador síncrono o coherente: $\phi = \phi_c$

$$d(t) = \frac{A_c}{2} [1 + m_a(t)]$$

MODULACIONES ANGULARES

PM Y FM

Modulaciones angulares

- La información está en el argumento de una senoide

$$c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \phi_c)$$

Se imprime en la frecuencia o fase de la portadora sinusoidal

- ▶ Modulación de fase (PM)
PM: *Phase Modulation*

$$\phi_c \rightarrow \phi_c(t) = f(m(t))$$

- ▶ Modulación de frecuencia (FM)
FM: *Frequency Modulation*

$$f_i(t) = f_c \rightarrow f_i(t) = f(m(t))$$

$f_i(t)$: frecuencia instantánea de la señal portadora

- Representación común de señales FM y PM

$$s(t) = A_c \cos(\theta(t)) \quad \text{La información está en } \theta(t) = f(m(t))$$

Frecuencia instantánea

- Representación común de señales PM y FM

$$s(t) = A_c \cos(\theta(t))$$

- ▶ La información está en el argumento angular

$$\theta(t) = \omega_c t + \phi(t) \text{ rad/s}$$

- Definición de frecuencia instantánea de una senoide

$$\omega_i(t) = \frac{d}{dt}\theta(t) \text{ rad/s}, \quad f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt}\theta(t) \text{ Hz}$$

- Señal modulada $s(t)$ y frecuencia instantánea

$$s(t) = A_c \cos(\underbrace{\omega_c t}_{2\pi f_c t} + \phi(t)), \quad f_i(t) = f_c + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt}\phi(t) \text{ Hz}$$

Modulaciones de fase (PM) y frecuencia (FM)

- Señal modulada $s(t)$ y frecuencia instantánea

$$s(t) = A_c \cos(\underbrace{\omega_c t}_{2\pi f_c t} + \phi(t)), \quad f_i(t) = f_c + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt}\phi(t) \text{ Hz}$$

- Si $m(t)$ es la señal moduladora (mensaje)

- ▶ Modulación de fase (PM)

$$\phi(t) = k_p m(t) \text{ rad/s}$$

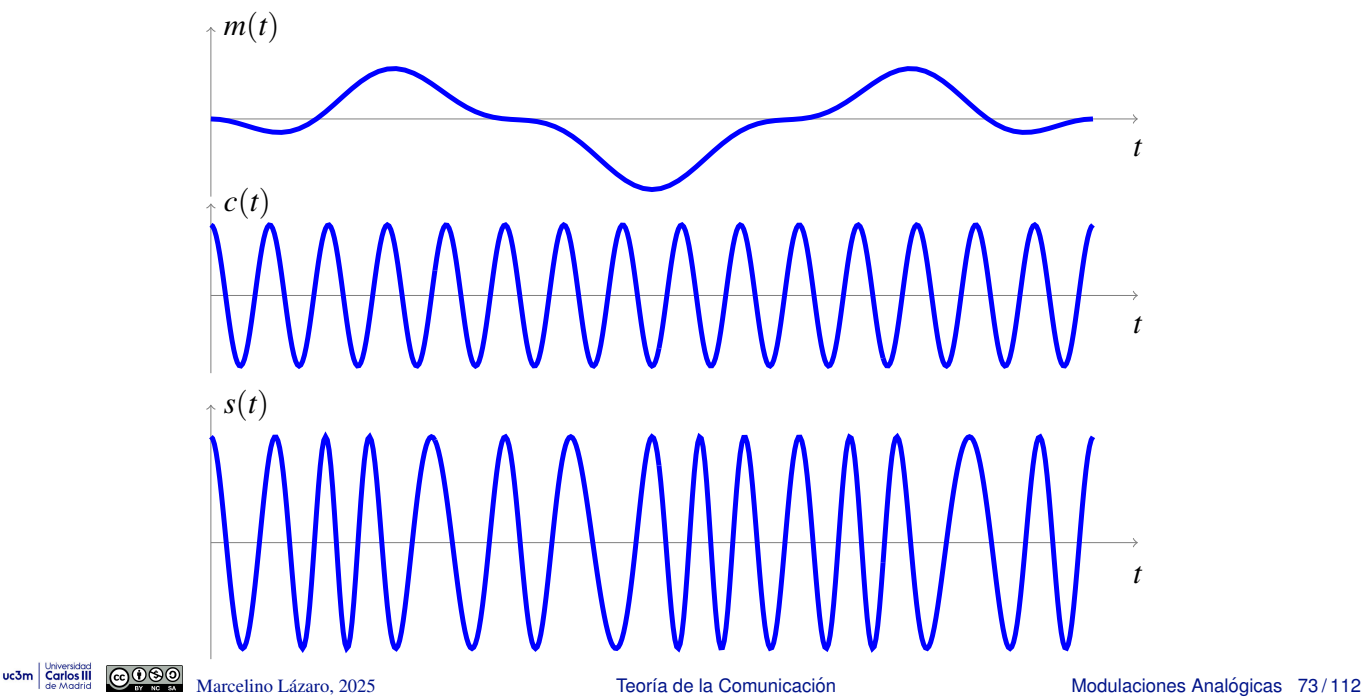
- ★ k_p : constante de desviación de fase

- ▶ Modulación de frecuencia (FM)

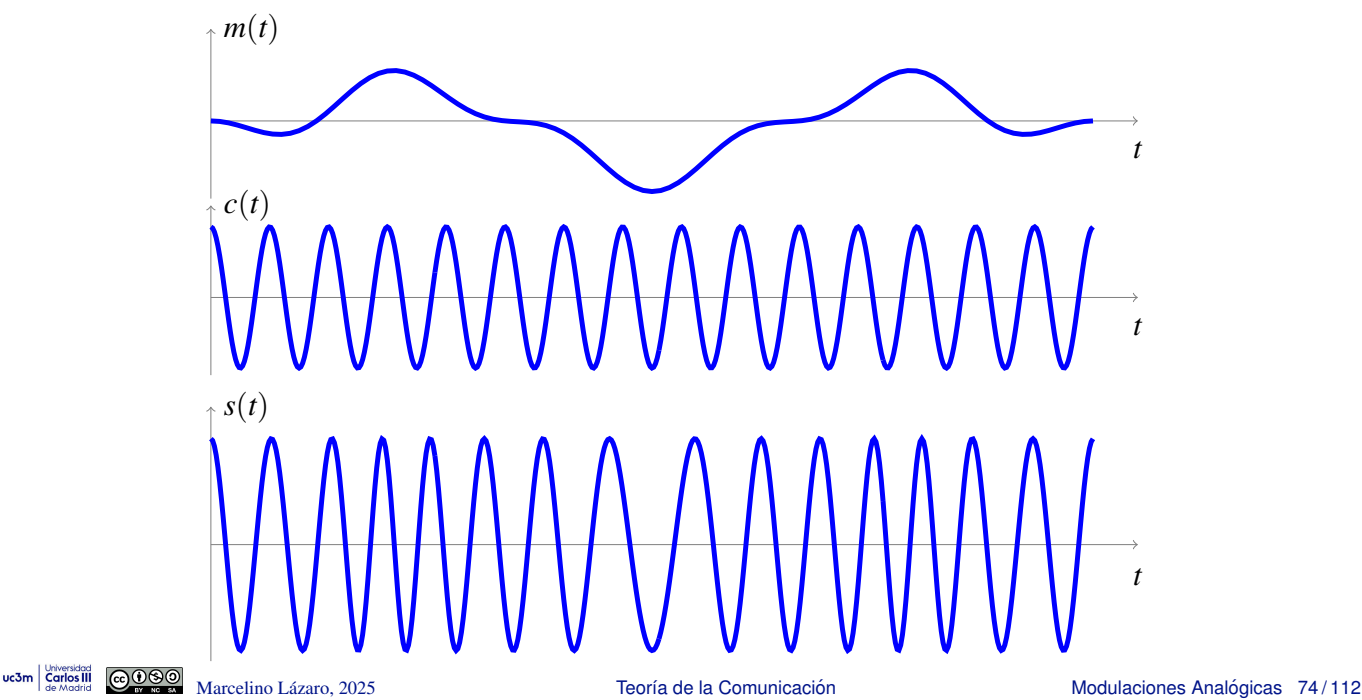
$$\Delta f_i(t) = f_i(t) - f_c = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt}\phi(t) = k_f m(t) \text{ Hz}$$

- ★ k_f : constante de desviación de frecuencia

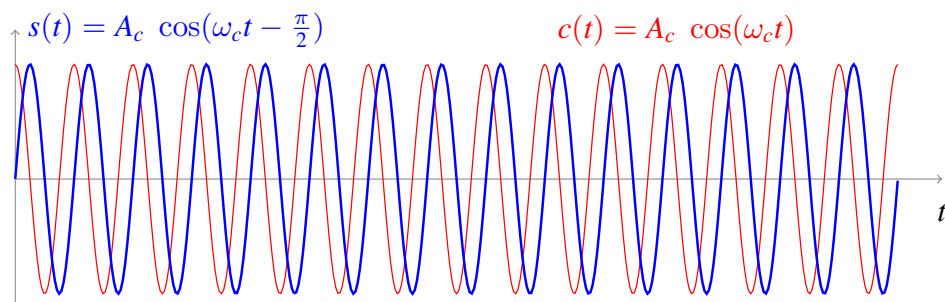
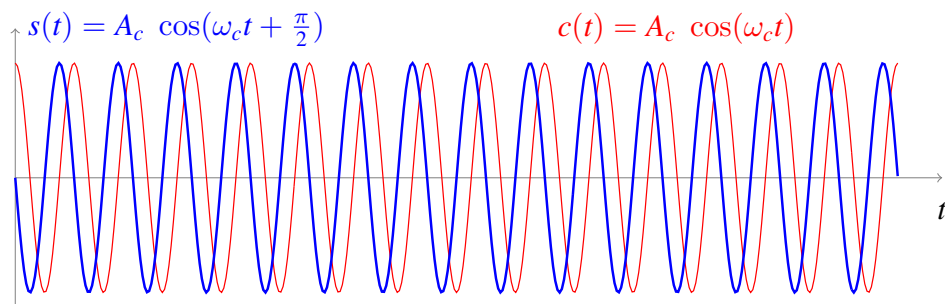
Forma de onda de una modulación PM



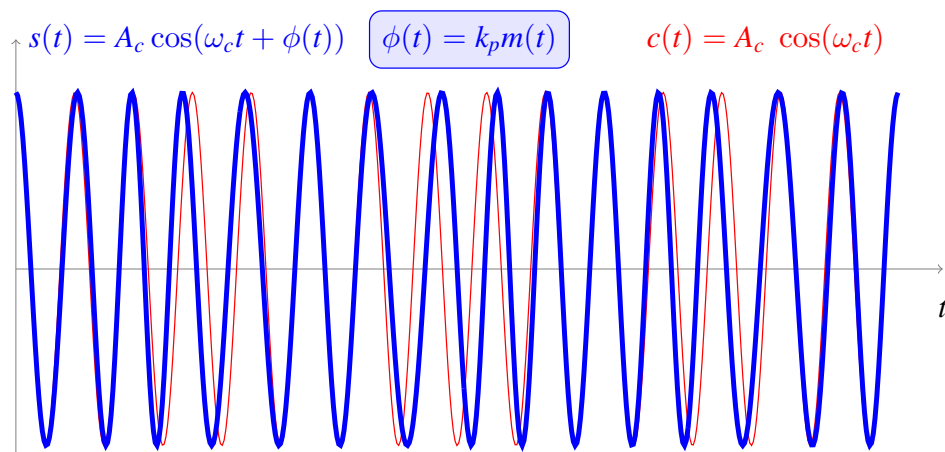
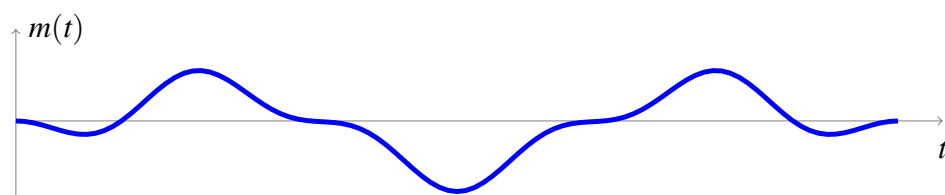
Forma de onda de una modulación FM



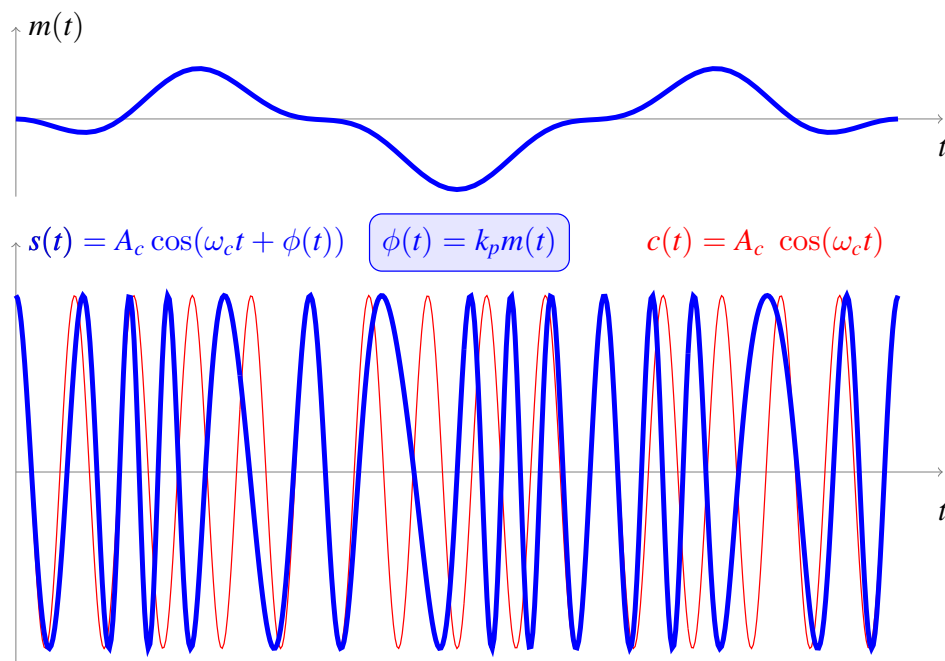
Desplazamiento temporal: adelanto/retardo de una senoide



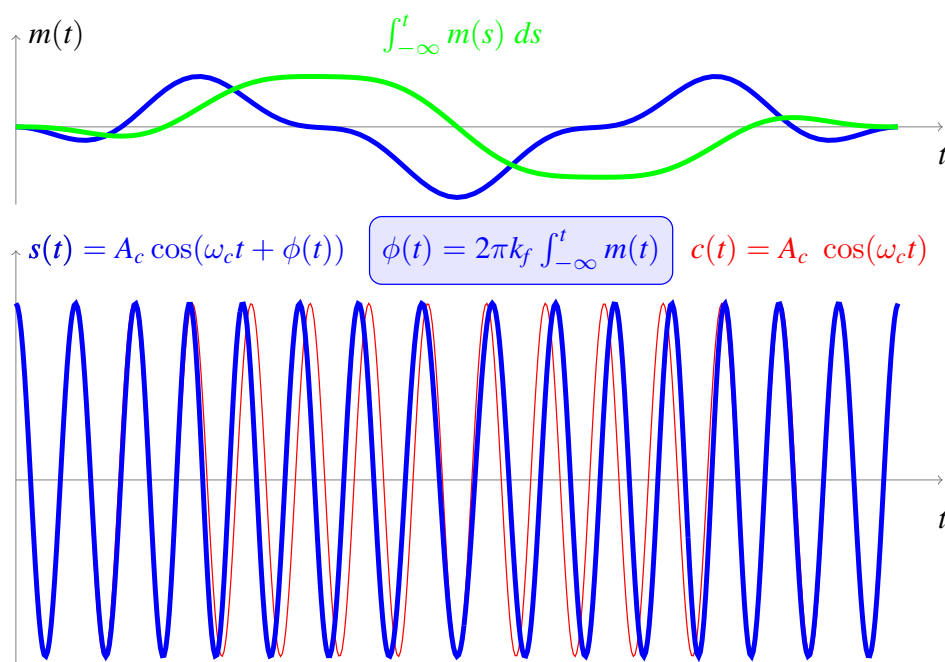
Modulación PM - Señal para $k_p = 2\pi \times \frac{1}{4}$



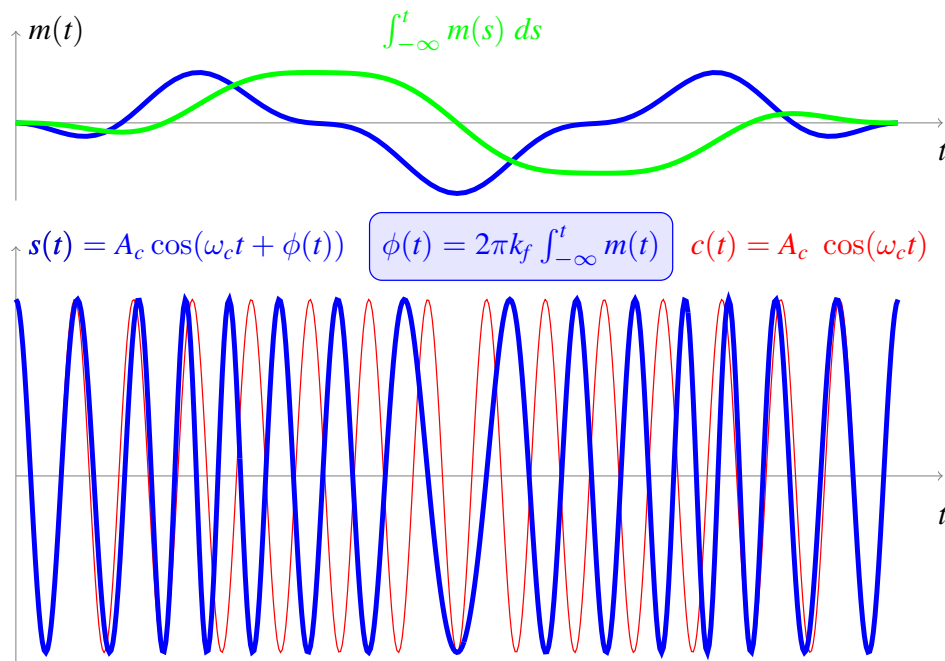
Modulación PM - Señal para $k_p = 2\pi \times \frac{3}{4}$



Modulación FM - Señal para $k_f = 2\pi \times \frac{1}{4}$



Modulación FM - Señal para $k_f = 2\pi \times \frac{3}{4}$



Relación PM / FM

- Modulación de fase:

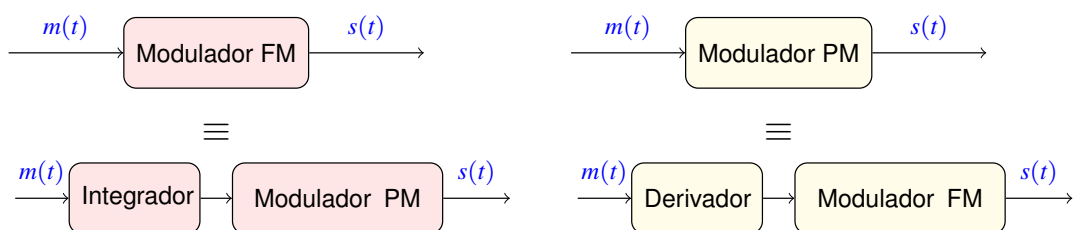
$$\phi(t) = k_p m(t)$$

- Modulación de frecuencia:

$$\Delta f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \phi(t) = k_f m(t)$$

- Expresiones de $\phi(t)$ y $\frac{d}{dt} \phi(t)$ en PM y FM

$\phi(t) = \begin{cases} k_p m(t) & \text{PM} \\ 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau & \text{FM} \end{cases}$	$\frac{d}{dt} \phi(t) = \begin{cases} k_p \frac{d}{dt} m(t) & \text{PM} \\ 2\pi k_f m(t) & \text{FM} \end{cases}$
---	---



Índice de modulación β

- Define las principales características de una modulación angular
 - ▶ Ancho de banda
 - ▶ Relación señal a ruido
- Desviaciones máximas:

- ▶ PM: máxima desviación de fase

$$\Delta\phi_{\text{máx}} = k_p \text{ máx}(|m(t)|)$$

- ▶ FM: máxima desviación de frecuencia

$$\Delta f_{\text{máx}} = k_f \text{ máx}(|m(t)|)$$

- Índices de modulación de una modulación PM y FM

$$\beta_p = \Delta\phi_{\text{máx}} = k_p \text{ máx}(|m(t)|) = k_p C_M$$

$$\beta_f = \frac{\Delta f_{\text{máx}}}{B} = \frac{k_f \text{ máx}(|m(t)|)}{B} = \frac{k_f C_M}{B}$$

- ▶ B : ancho de banda en Hz de la señal moduladora $m(t)$

Análisis espectral de modulaciones angulares

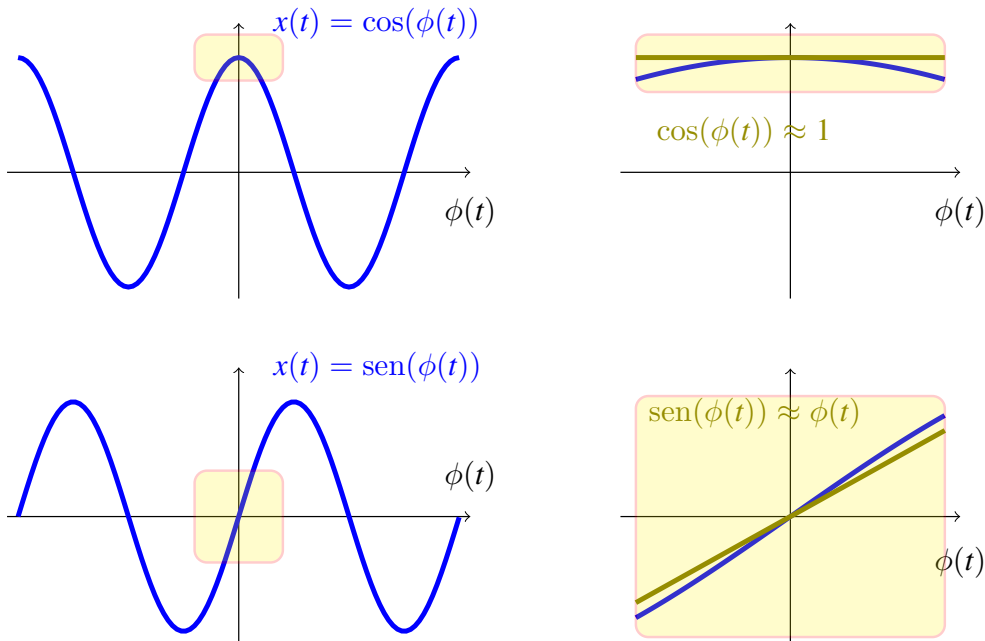
- Un análisis general es complejo
 - ▶ Relación no lineal entre $m(t)$ y $s(t)$

$$s(t) = A_c \cos(\omega_c t + \phi(t))$$

$$\phi(t) = \begin{cases} k_p m(t) & \text{PM} \\ 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau & \text{FM} \end{cases}$$

- Cálculo (exacto o aproximado) de la representación espectral
 - ▶ Modulaciones angulares de banda estrecha
 - ▶ Modulaciones angulares con moduladora sinusoidal
 - ▶ Modulaciones angulares con moduladora periódica
- Regla heurística para el cálculo del ancho de banda
 - ▶ Modulaciones angulares con moduladora genérica
 - ★ Regla de Carson: aproximación del ancho de banda

Aproximaciones de coseno y seno (argumento pequeño)



Modulación angular de banda estrecha

- Modulación angular de banda estrecha: $\phi(t) \ll 1$
 - ▶ Constantes k_p o k_f pequeñas (β pequeño)
- Expresión genérica de la señal modulada

$$s(t) = A_c \cos(\omega_c t + \phi(t))$$

- ▶ Relación trigonométrica:

$$\cos(A \pm B) = \cos(A) \cos(B) \mp \text{sen}(A) \text{sen}(B)$$

- ▶ Aproximaciones consideradas (para $\phi(t)$ pequeño)

$$\cos(\phi(t)) \approx 1, \text{sen}(\phi(t)) \approx \phi(t)$$

- Expresión alternativa para la señal modulada

$$\begin{aligned} s(t) &= A_c \cos(\omega_c t) \cos \phi(t) - A_c \text{sen}(\omega_c t) \text{sen} \phi(t) \\ &\approx A_c \cos(\omega_c t) - A_c \phi(t) \text{sen}(\omega_c t) \end{aligned}$$

- ▶ Expresión similar a la de una modulación AM convencional

$$\text{AM Conv.: } s(t) = A_c \cos(\omega_c t) + A_c m_a(t) \cos(\omega_c t)$$

$$\text{Recuerde que } \phi(t) = \begin{cases} k_p m(t) & \text{PM} \\ 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau & \text{FM} \end{cases}$$

Modulación angular de banda estrecha - Análisis

- Expresión aproximada para la señal modulada

$$s(t) \approx A_c \cos(\omega_c t) - A_c \phi(t) \sin(\omega_c t)$$

- ▶ Expresión similar a la de una modulación AM convencional

$$s(t) = A_c \cos(\omega_c t) + A_c m_a(t) \cos(\omega_c t)$$

- Espectro de la señal modulada (considerando la aproximación)

- ▶ Dos deltas, situadas en $\pm\omega_c$ (espectro portadora)
- ▶ Réplicas del espectro de $\phi(t)$ situadas en $\omega = \pm\omega_c$
- ▶ Forma del espectro de $\phi(t)$

- ★ PM: proporcional al espectro de $m(t)$

$$\phi(t) = k_p m(t) \leftrightarrow \Phi(j\omega) = k_p M(j\omega)$$

- ★ FM: proporcional al espectro de la integral de $m(t)$

$$\phi(t) = 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau \leftrightarrow \Phi(j\omega) = 2\pi k_f \frac{M(j\omega)}{j\omega}$$

- Ancho de banda (similar AM convencional)

$$W_{BE} \approx 2 W \text{ rad/s}, \quad B_{BE} \approx 2 B \text{ Hz}$$

Modulación angular de banda estrecha - Resumen

- Señal en el dominio del tiempo

$$s(t) \approx A_c \cos(\omega_c t) - A_c \phi(t) \sin(\omega_c t)$$

$$\phi(t) = \begin{cases} k_p m(t) & \text{PM} \\ 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau & \text{FM} \end{cases}$$

- Transformada de Fourier

$$S(j\omega) \approx A_c \pi [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] - \frac{A_c}{2j} [\Phi(j\omega - j\omega_c) - \Phi(j\omega + j\omega_c)]$$

$$\Phi(j\omega) = \begin{cases} k_p M(j\omega) & \text{PM} \\ 2\pi k_f \frac{M(j\omega)}{j\omega} & \text{FM} \end{cases}$$

- Densidad espectral de potencia

$$S_S(j\omega) \approx \frac{A_c^2}{2} \pi [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] + \frac{A_c^2}{4} [S_\Phi(j\omega - j\omega_c) + S_\Phi(j\omega + j\omega_c)]$$

$$S_\Phi(j\omega) = \begin{cases} k_p^2 S_M(j\omega) & \text{PM} \\ (2\pi k_f)^2 \frac{S_M(j\omega)}{\omega^2} & \text{FM} \end{cases}$$

Modulación mediante una señal sinusoidal

- Señal moduladora sinusoidal de amplitud a y frecuencia ω_m rad/s

$$m(t) = \begin{cases} a \sin(\omega_m t) & \text{PM} \\ a \cos(\omega_m t) & \text{FM} \end{cases}$$

- Índices de modulación de una modulación PM y FM

$$\beta_p = \Delta\phi_{\text{máx}} = k_p \text{ máx}(|m(t)|) = k_p C_M = k_p a$$

$$\beta_f = \frac{\Delta f_{\text{máx}}}{B} = \frac{k_f \text{ máx}(|m(t)|)}{B} = \frac{k_f C_M}{B} = k_f a \frac{2\pi}{\omega_m}$$

- Expresiones del término de fase $\phi(t)$

- Expresiones de $\phi(t)$ para PM

$$\phi(t) = k_p m(t) = k_p a \sin(\omega_m t) = \beta_p \sin(\omega_m t)$$

- Expresiones de $\phi(t)$ para FM

$$\phi(t) = 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau = 2\pi k_f a \frac{1}{\omega_m} \sin(\omega_m t) = \beta_f \sin(\omega_m t)$$

- Señal modulada: expresión común para PM y FM

$$s(t) = A_c \cos(\omega_c t + \phi(t)) = A_c \cos(\omega_c t + \beta \sin(\omega_m t))$$

Modulación mediante una señal sinusoidal (II)

- Señal moduladora sinusoidal

$$m(t) = \begin{cases} a \sin(\omega_m t) & \text{PM} \\ a \cos(\omega_m t) & \text{FM} \end{cases}$$

- Señal modulada

$$s(t) = A_c \cos(\omega_c t + \beta \sin(\omega_m t)) = \text{Re} \left(A_c e^{j\omega_c t} e^{j\beta \sin(\omega_m t)} \right)$$

La función $e^{j\beta \sin(\omega_m t)}$ es periódica de frecuencia $f_m = \frac{\omega_m}{2\pi}$ Hz

$$\text{Desarrollo en serie de Fourier: } e^{j\beta \sin(\omega_m t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{j(n \omega_m)t}$$

Coeficiente de índice n del desarrollo en serie: $J_n(\beta)$

$J_n(\beta)$: función de Bessel de primera especie de orden n y argumento β

- Expresión alternativa de la señal modulada

$$s(t) = \text{Re} \left(A_c e^{j\omega_c t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{j(n \omega_m)t} \right) = \text{Re} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_c J_n(\beta) \underbrace{e^{j\omega_c t} e^{j(n \omega_m)t}}_{e^{j(\omega_c + n \omega_m)t}} \right)$$

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_c J_n(\beta) \cos((\omega_c + n \omega_m) t)$$

Modulación mediante una señal sinusoidal - Análisis

- La señal modulada contiene sinusoides con las frecuencias

$$\text{Frecuencias (Hz)} : f_c + n f_m, \quad \text{para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\text{Pulsación (rad/s)} : \omega_c + n \omega_m, \quad \text{para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\text{Amplitudes} : A_c J_n(\beta)$$

- Ancho de banda efectivo (contiene 98 % de la potencia):

$$B_e = 2 (\beta + 1) f_m \text{ Hz}$$

$$B_e = 2 (\beta + 1) f_m = \begin{cases} 2(k_p a + 1)f_m & \text{PM} \\ 2\left(\frac{k_f a}{f_m} + 1\right)f_m & \text{FM} \end{cases} = \begin{cases} 2(k_p a + 1)f_m & \text{PM} \\ 2(k_f a + f_m) & \text{FM} \end{cases}$$

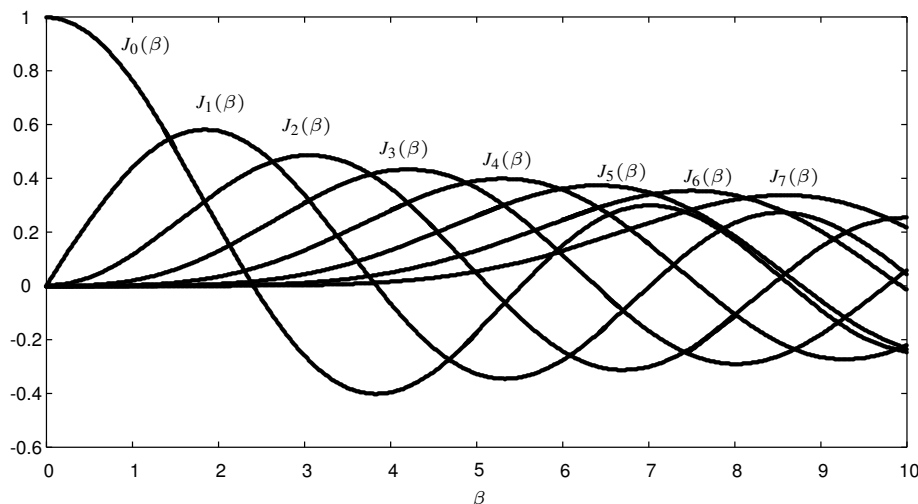
- Número total de armónicos en el ancho de banda efectivo B_e

$$M_e = 2[\beta] + 3 = \begin{cases} 2[k_p a] + 3 & \text{PM} \\ 2\left[\frac{k_f a}{f_m}\right] + 3 & \text{FM} \end{cases}$$

Funciones de Bessel $J_n(\beta)$

$$J_n(\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\beta}{2}\right)^{n+2k}}{k!(k+n)!}, \quad \text{Para } \beta \downarrow J_n(\beta) \approx \frac{\beta^n}{2^n n!}, \quad J_{-n}(\beta) = \begin{cases} J_n(\beta), & n \text{ par} \\ -J_n(\beta), & n \text{ impar} \end{cases}$$

Se encuentra habitualmente en tablas o en figuras



Funciones de Bessel $J_n(\beta)$

n	$\beta = 0,1$	$\beta = 0,2$	$\beta = 0,5$	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 5$	$\beta = 8$	$\beta = 10$
0	0,9975	0,9900	0,9385	0,7652	0,2239	-0,1776	0,1717	-0,2459
1	0,0499	0,0995	0,2423	0,4401	0,5767	-0,3276	0,2346	0,0435
2	0,0012	0,0050	0,0306	0,1149	0,3528	0,0466	-0,1130	0,2546
3		0,0002	0,0026	0,0196	0,1289	0,3648	-0,2911	0,0584
4			0,0002	0,0025	0,0340	0,3912	-0,1054	-0,2196
5				0,0002	0,0070	0,2611	0,1858	-0,2341
6					0,0012	0,1310	0,3376	-0,0145
7					0,0002	0,0534	0,3206	0,2167
8						0,0184	0,2235	0,3179
9						0,0055	0,1263	0,2919
10						0,0015	0,0608	0,2075
11						0,0004	0,0256	0,1231
12						0,0001	0,0096	0,0634
13							0,0033	0,0290
14							0,0010	0,0120
15							0,0003	0,0045
16							0,0001	0,0016

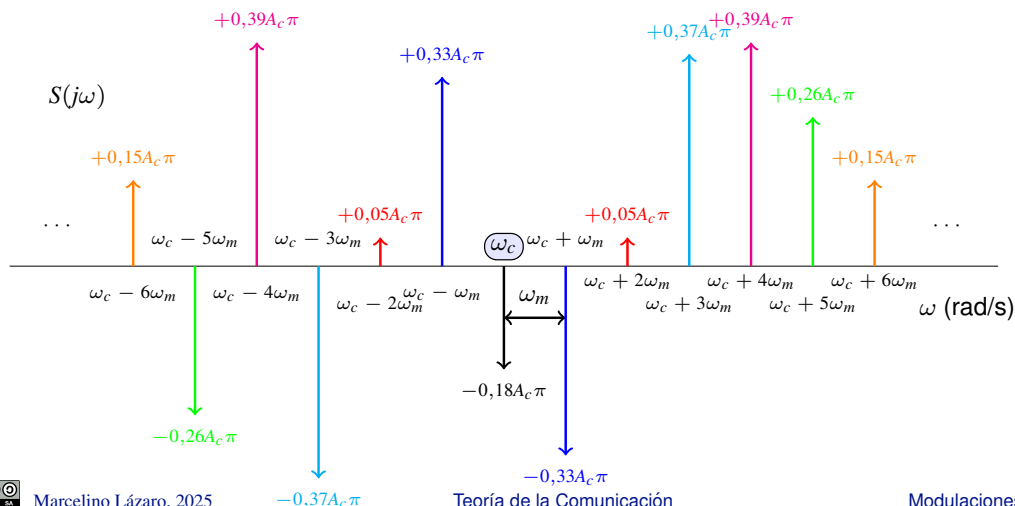
Forma del espectro - Ejemplo - Modulación con $\beta = 5$

- Suma de sinusoides de amplitud $A_c J_n(\beta)$ y frecuencias $\omega_c + n \omega_m$ rad/s

- Espectro: suma de deltas

- ★ Frecuencias: $\omega_c + n \omega_m$
- ★ Amplitudes: $A_c J_n(\beta) \pi$
- ★ Número de armónicos en ancho de banda efectivo: $M_e = 2[\beta] + 3 = 13$

$$J_0(5) = -0,18, J_1(5) = -0,33, J_2(5) = 0,05, J_3(5) = 0,37, J_4(5) = 0,39, J_5(5) = 0,26, J_6(5) = 0,15 \dots$$



Otros tipos de moduladoras

- Modulación mediante una señal periódica
 - ▶ Admite un desarrollo en serie de Fourier
 - ★ Suma de sinusoides de frecuencias múltiplo de la que define el período
 - Frecuencias en el espectro de la señal

$$f_c \pm n f_m \text{ ó } (\omega_c \pm n \omega_m)$$

- Amplitudes de cada frecuencia: suma de las contribuciones de cada armónico

- Modulación mediante una señal determinista no periódica
 - ▶ Análisis complicado debido a la no linealidad
 - ▶ Se aplica la [Regla de Carson](#) (regla heurística)

Para señales moduladoras con ancho de banda B Hz

$$B_{Carson} \approx 2 (\beta + 1) B \text{ Hz}$$

Ancho de banda dependiente del índice de modulación β

EFECTO DEL RUIDO

EN

MODULACIONES ANALÓGICAS

Efecto del ruido en modulaciones de amplitud

● Premisas

- ▶ Señal moduladora $m(t)$
 - ★ Ancho de banda B Hz
 - ★ Potencia P_M Watts
 - ▶ Señal recibida
 - ★ Transmisión sobre canal gaussiano
 - ★ Transmisión ideal sin atenuación, sin distorsión, sólo con ruido térmico
- $$r(t) = s(t) + n(t)$$
- ★ P_S : Potencia del término de señal (a la entrada del receptor)
 - ▶ Ruido térmico: modelo estadístico habitual
 - ★ Proceso aleatorio $n(t)$ estacionario, ergódico, blanco, gaussiano, con densidad espectral de potencia
- $$S_n(j\omega) = \frac{N_0}{2}$$
- ▶ Modulaciones de amplitud : Receptor coherente
 - ★ Se introducirán filtros para limitar el efecto del ruido
 - ★ Los filtros se considerarán como ideales (prestaciones límite)

- Se analiza la relación señal a ruido de la señal demodulada para los distintos tipos de modulación y se comparará con la relación señal a ruido de la señal en una transmisión en banda base $\left(\frac{S}{N}\right)_b$

Referencia - Transmisión en banda base

- Se transmite (y se recibe) la señal sin modular: $s(t) = m(t) \rightarrow P_S = P_M$
- Señal en el receptor: $r(t) = s(t) + n(t)$
 - ▶ Habitualmente existe atenuación durante la transmisión
 - ★ En este análisis se obvia por simplicidad
 - ★ Es trivial incluirlo en el desarrollo: $s(t) \rightarrow \alpha s(t), P_S \rightarrow \alpha^2 P_S$
- Filtrado en el receptor para minimizar el efecto del ruido
 - ▶ Filtro paso bajo ideal de ancho de banda B Hz

$$r(t) = s(t) + n(t) \xrightarrow{\text{LPF } B \text{ Hz}} d(t) = s(t) + n_f(t)$$

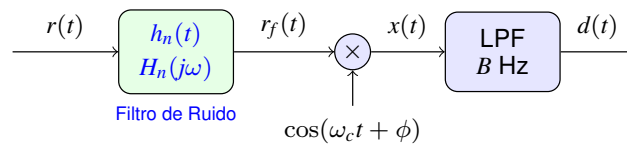
- ▶ Potencia del ruido a la salida del filtro

$$P_{n_f} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{n_f}(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{+2\pi B} \frac{N_0}{2} d\omega = N_0 B$$

- Relación señal a ruido en banda base

$$\left(\frac{S}{N}\right)_b = \frac{P_S}{N_0 B}, \quad \left(\frac{S}{N}\right)_b \text{ (dB)} = 10 \log_{10} \frac{P_S}{N_0 B} \text{ dB}$$

Receptor coherente + filtrado de ruido - Notación



- Filtro de ruido $h_n(t) \xleftrightarrow{\mathcal{TF}} H_n(j\omega)$
 - ▶ Filtro paso banda ideal : dependiente de la modulación utilizada
 - ★ Banda de paso y ancho de banda: igual que señal modulada $s(t)$
- Receptor coherente: $\phi = \phi_c$ (por simplicidad, $\phi_c = 0$)
- Señal recibida: $r(t) = s(t) + n(t)$
- Señal filtrada - filtro adecuado a la modulación: $s(t) * h_n(t) = s(t)$

$$r_f(t) = s(t) + n_f(t), \text{ con } n_f(t) = n(t) * h_n(t)$$

- Señal demodulada

$$x(t) = r_f(t) \times \cos(\omega_c t) = s(t) \cos(\omega_c t) + n_f(t) \cos(\omega_c t) = x_s(t) + x_n(t)$$

- Señal demodulada filtrada

$$d(t) = x(t) * h_{LPF}(t) = x_s(t) * h_{LPF}(t) + x_n(t) * h_{LPF}(t) = d_s(t) + d_n(t)$$

Receptor coherente + filtrado de ruido - Análisis

- Salida del receptor: Término de señal $d_s(t)$
 - ▶ No se ve afectado por el filtro de ruido
 - ▶ Para modulaciones de amplitud se calculó en su momento

Modulación	P_S (Watts)	$d_s(t)$	P_{d_s} (Watts)
AM convencional	$\frac{A_c^2}{2} [1 + P_{M_a}]$	$\frac{A_c}{2} [1 + m_a(t)]$	$\frac{A_c^2}{4} P_{M_a}$
DBL	$\frac{A_c^2}{2} P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$
BLU	$A_c^2 P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$
BLV	$A_c^2 P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$

P_S : potencia de la señal modulada a la entrada del receptor

P_{d_s} : potencia en $d_s(t)$ relativa a $m(t)$ - P_{M_a} : potencia de $m_a(t)$, $P_{M_a} = \frac{a^2}{C_M^2} P_M$

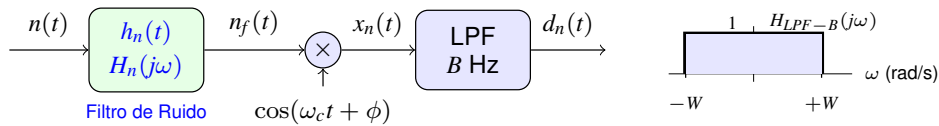
- Salida del receptor: Término de ruido $d_n(t)$

- ▶ Depende del filtro de ruido empleado
 - ★ Depende del tipo de modulación
 - ★ Potencia: P_{d_n}

- Relación señal a ruido tras la demodulación: $\left(\frac{S}{N}\right)_d = \frac{P_{d_s}}{P_{d_n}}$

- ▶ Se comparará con la relación señal a ruido en banda base: $\left(\frac{S}{N}\right)_b = \frac{P_S}{N_0 B}$

Potencia del ruido tras la demodulación - General



- Densidad espectral de potencia del ruido filtrado $n_f(t)$

$$S_{n_f}(j\omega) = S_n(j\omega) |H_n(j\omega)|^2 = \frac{N_0}{2} |H_n(j\omega)|^2$$

- Densidad espectral de potencia del ruido demodulado $x_n(t)$

$$S_{x_n}(j\omega) = \frac{1}{4} S_{n_f}(j\omega - j\omega_c) + \frac{1}{4} S_{n_f}(j\omega + j\omega_c) = \frac{N_0}{8} \left[|H_n(j\omega - j\omega_c)|^2 + |H_n(j\omega + j\omega_c)|^2 \right]$$

- Densidad espectral de potencia tras el filtrado paso bajo $d_n(t)$

$$S_{d_n}(j\omega) = S_{x_n}(j\omega) |H_{LPF-B}(j\omega)|^2 = \begin{cases} S_{x_n}(j\omega), & \text{si } |\omega| \leq W = 2\pi B \\ 0, & \text{si } |\omega| > W = 2\pi B \end{cases}$$

- Potencia tras el filtrado paso bajo

$$\begin{aligned} P_{d_n} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{d_n}(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} S_{x_n}(j\omega) d\omega \\ &= \frac{N_0}{8} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} |H_n(j\omega - j\omega_c)|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} |H_n(j\omega + j\omega_c)|^2 d\omega \right] \end{aligned}$$

Potencia del ruido tras la demodulación - General (II)

La potencia de ruido a la salida de un receptor AM síncrono es

$$P_{d_n} = \frac{N_0}{8} \times F_0 \text{ Watts con } F_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W |H_n(j\omega - j\omega_c)|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W |H_n(j\omega + j\omega_c)|^2 d\omega$$

Haciendo sencillos cambios de variable ($\omega' = \omega - \omega_c$ y $\omega' = \omega + \omega_c$)

$$F_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c - W}^{-\omega_c + W} |H_n(j\omega')|^2 d\omega' + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_c - W}^{\omega_c + W} |H_n(j\omega')|^2 d\omega'$$

Teniendo en cuenta la simetría par de $|H_n(j\omega)|$

$$F_0 = 2 \times F, \text{ con } F = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_c - W}^{\omega_c + W} |H_n(j\omega)|^2 d\omega$$

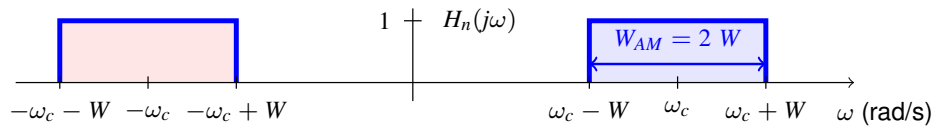
$$P_{d_n} = \frac{N_0}{4} \times F$$

Cálculo de la potencia de ruido - AM convencional y DBL

- Para ambas modulaciones el filtro de ruido es idéntico

$$H_n(j\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega_c - W \leq |\omega| \leq \omega_c + W \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

W : ancho de banda en rad/s ($W = 2\pi B$)

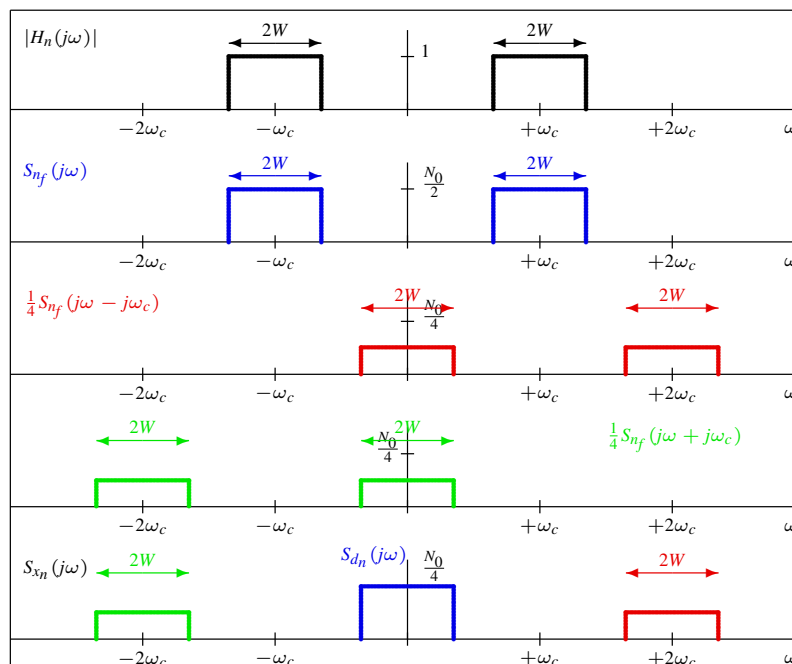


- Cálculo de la potencia de ruido

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_c - W}^{\omega_c + W} |H_n(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_c - W}^{\omega_c + W} 1 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} 2W = 2B \end{aligned}$$

$$P_{dn} = \frac{N_0}{4} \times F = \frac{1}{2} N_0 B \text{ Watts}$$

Ruido en DBL y AM convencional - Interpretación frecuencial

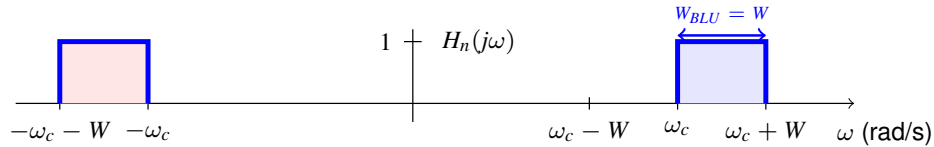


Cálculo de la potencia de ruido - BLU

- Se presenta el caso de banda lateral superior

$$H_n(j\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega_c \leq |\omega| \leq \omega_c + W \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

W : ancho de banda en rad/s ($W = 2\pi B$)



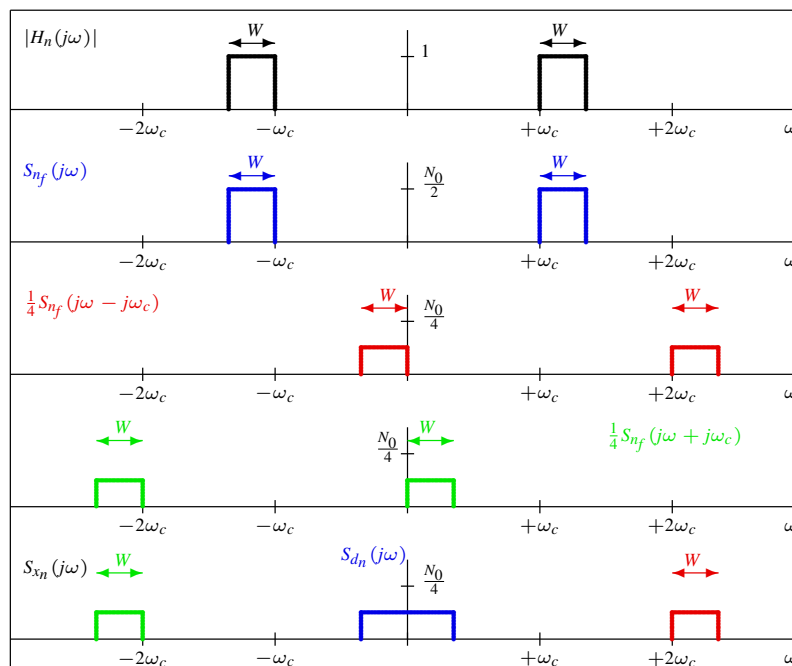
- Cálculo de la potencia de ruido

$$F = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_c - W}^{\omega_c + W} |H_n(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_c}^{\omega_c + W} 1 d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} W = B$$

$$P_{d_n} = \frac{N_0}{4} \times F = \frac{1}{4} N_0 B \text{ Watts}$$

Ruido en BLU - Interpretación frecuencial (BLS)



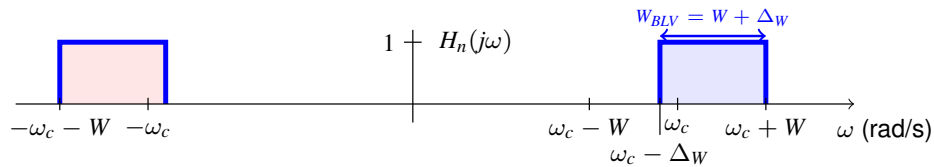
Cálculo de la potencia de ruido - BLV

- Se presenta el caso de banda lateral superior

$$H_n(j\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega_c - \Delta_W \leq |\omega| \leq \omega_c + W \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

W : ancho de banda en rad/s ($W = 2\pi B$)

Δ_W : exceso de ancho de banda vestigial en rad/s ($\Delta_W = 2\pi\Delta_B$)



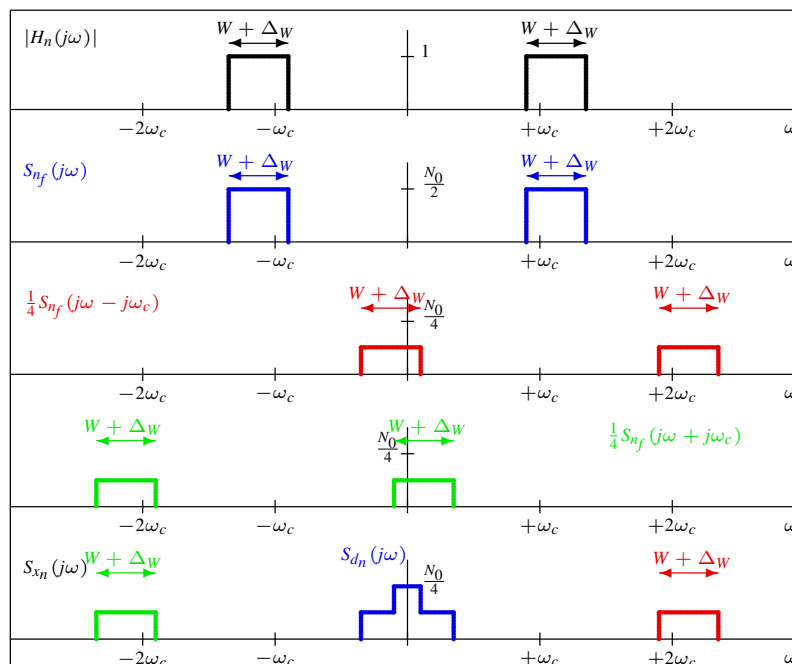
- Cálculo de la potencia de ruido

$$F = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_c - W}^{\omega_c + W} |H_n(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_c - \Delta_W}^{\omega_c + W} 1 d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} (W + \Delta_W) = (B + \Delta_B)$$

$$P_{dn} = \frac{N_0}{4} \times F = \frac{1}{4} N_0 (B + \Delta_B) \text{ Watts}$$

Ruido en BLV - Interpretación frecuencial (BLS)



Relación señal a ruido a la salida de un receptor coherente

Modulación	P_S	$d_S(t)$	P_{d_S}	P_{d_n}
AM Convencional	$\frac{A_c^2}{2} [1 + P_{M_a}]$	$\frac{A_c}{2} [1 + m_a(t)]$	$\frac{A_c^2}{4} P_{M_a}$	$\frac{1}{2} N_0 B$
DBL	$\frac{A_c^2}{2} P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$	$\frac{1}{2} N_0 B$
BLU	$A_c^2 P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$	$\frac{1}{4} N_0 B$
BLV	$A_c^2 P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$	$\frac{1}{4} N_0 (B + \Delta_B)$

P_S : potencia de la señal a la entrada del receptor Se asume: $r(t) = s(t) + n(t)$

- Relación señal a ruido

$$\left(\frac{S}{N} \right) = \frac{P_{d_S}}{P_{d_n}}$$

- Relación señal a ruido comparada con una transmisión en banda base

$$\left(\frac{S}{N} \right) = \eta \left(\frac{S}{N} \right)_b = \eta \frac{P_S}{N_0 B}$$

Análisis del resultado: $\eta \gtrless 1$

Cálculo de relaciones señal a ruido - DBL y BLU

Modulación	P_S	$d_S(t)$	P_{d_S}	P_{d_n}
AM convencional	$\frac{A_c^2}{2} [1 + P_{M_a}]$	$\frac{A_c}{2} [1 + m_a(t)]$	$\frac{A_c^2}{4} P_{M_a}$	$\frac{1}{2} N_0 B$
DBL	$\frac{A_c^2}{2} P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$	$\frac{1}{2} N_0 B$
BLU	$A_c^2 P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$	$\frac{1}{4} N_0 B$
BLV	$A_c^2 P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$	$\frac{1}{4} N_0 (B + \Delta_B)$

- Relación señal a ruido para DBL

$$\left(\frac{S}{N} \right)_{DBL} = \frac{P_{d_S}}{P_{d_n}} = \frac{\frac{A_c^2}{4} P_M}{\frac{1}{2} N_0 B} = \frac{\frac{A_c^2}{2} P_M}{N_0 B} = \frac{P_S}{N_0 B} = \left(\frac{S}{N} \right)_b$$

Misma relación señal a ruido que transmitiendo en banda base

- Relación señal a ruido para BLU

$$\left(\frac{S}{N} \right)_{BLU} = \frac{P_{d_S}}{P_{d_n}} = \frac{\frac{A_c^2}{4} P_M}{\frac{1}{4} N_0 B} = \frac{A_c^2 P_M}{N_0 B} = \frac{P_S}{N_0 B} = \left(\frac{S}{N} \right)_b$$

Misma relación señal a ruido que transmitiendo en banda base

Cálculo de relaciones señal a ruido - AM convencional

Modulación	P_S	$d_S(t)$	P_{d_S}	P_{d_n}
AM convencional	$\frac{A_c^2}{2} [1 + P_{M_a}]$	$\frac{A_c}{2} [1 + m_a(t)]$	$\frac{A_c^2}{4} P_{M_a}$	$\frac{1}{2} N_0 B$
DBL	$\frac{A_c^2}{2} P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$	$\frac{1}{2} N_0 B$
BLU	$A_c^2 P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$	$\frac{1}{4} N_0 B$
BLV	$A_c^2 P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$	$\frac{1}{4} N_0 (B + \Delta_B)$

● Relación señal a ruido para AM convencional

$$\begin{aligned} \left(\frac{S}{N} \right)_{AM} &= \frac{P_{d_S}}{P_{d_n}} = \frac{\frac{A_c^2}{4} P_{M_a}}{\frac{1}{2} N_0 B} = \frac{\frac{A_c^2}{2} P_{M_a}}{N_0 B} = \frac{P_{M_a}}{1 + P_{M_a}} \frac{\frac{A_c^2}{2} [1 + P_{M_a}]}{N_0 B} \\ &= \underbrace{\frac{P_{M_a}}{1 + P_{M_a}}}_{\eta_{AM}} \frac{P_S}{N_0 B} = \eta_{AM} \left(\frac{S}{N} \right)_b \end{aligned}$$

- Peor que transmitiendo en banda base: Factor de eficiencia $\eta_{AM} < 1$

$$\eta_{AM} = \frac{P_{M_a}}{1 + P_{M_a}} = \frac{\frac{a^2}{C_M^2} P_M}{1 + \frac{a^2}{C_M^2} P_M} = \frac{P_M}{\frac{C_M^2}{a^2} + P_M}$$

Depende del índice de modulación: peor eficiencia para valores bajos de a

Cálculo de relaciones señal a ruido - BLV

Modulación	P_S	$d_S(t)$	P_{d_S}	P_{d_n}
AM convencional	$\frac{A_c^2}{2} [1 + P_{M_a}]$	$\frac{A_c}{2} [1 + m_a(t)]$	$\frac{A_c^2}{4} P_{M_a}$	$\frac{1}{2} N_0 B$
DBL	$\frac{A_c^2}{2} P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$	$\frac{1}{2} N_0 B$
BLU	$A_c^2 P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$	$\frac{1}{4} N_0 B$
BLV	$A_c^2 P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$	$\frac{1}{4} N_0 (B + \Delta_B)$

● Relación señal a ruido para BLV

$$\begin{aligned} \left(\frac{S}{N} \right)_{BLV} &= \frac{P_{d_S}}{P_{d_n}} = \frac{\frac{A_c^2}{4} P_M}{\frac{1}{4} N_0 (B + \Delta_B)} = \frac{A_c^2 P_M}{N_0 (B + \Delta_B)} = \frac{B}{B + \Delta_B} \frac{A_c^2 P_M}{N_0 B} \\ &= \underbrace{\frac{B}{B + \Delta_B}}_{\eta_{BLV}} \frac{P_S}{N_0 B} = \eta_{BLV} \left(\frac{S}{N} \right)_b \end{aligned}$$

- Peor que transmitiendo en banda base: Factor de eficiencia $\eta_{BLV} < 1$

$$\eta_{BLV} = \frac{B}{B + \Delta_B}$$

Depende del exceso de ancho de banda Δ_B vestigial: habitualmente $\Delta_B \ll B$ y en ese caso $\eta_{BLV} \approx 1$, i.e., la relación señal a ruido es relativamente cercana a la de banda base

Ruido en modulaciones angulares

- Análisis mucho más complejo (dependencia no lineal)
- Salida del demodulador (con ruido)

$$d(t) = \begin{cases} k_p m(t) + Y_n(t), & \text{PM} \\ k_f m(t) + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} Y_n(t), & \text{FM} \end{cases}$$

$Y_n(t)$: término de ruido a la salida del demodulador

- Relación señal a ruido (para potencia de señal recibida $P_S = \frac{A_c^2}{2}$)

$$\left(\frac{S}{N}\right)_d = \begin{cases} \frac{k_p^2 A_c^2}{2 N_0 B} P_M = P_M \left(\frac{\beta_p}{\max |m(t)|} \right)^2 \left(\frac{S}{N}\right)_b, & \text{PM} \\ \frac{3k_f^2 A_c^2}{2B^2} P_M = 3P_M \left(\frac{\beta_f}{\max |m(t)|} \right)^2 \left(\frac{S}{N}\right)_b, & \text{FM} \end{cases}$$

Ganancia en relación señal a ruido proporcional al índice de modulación al cuadrado

- Expresión general

$$\left(\frac{S}{N}\right)_d = \alpha \left(\frac{P_M}{C_M^2}\right) \times \beta^2 \times \left(\frac{S}{N}\right)_b$$

- ▶ El factor α depende de la modulación: $\alpha_{PM} = 1, \alpha_{FM} = 3$
- ▶ El término $\left(\frac{P_M}{C_M^2}\right)$ suele ser constante (depende del tipo de señales)

Ruido en modulaciones angulares - Efecto umbral

- La ganancia en $\left(\frac{S}{N}\right)_d$ sólo se obtiene a partir de una relación señal a ruido umbral a la entrada del receptor

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{umbral}} = 20 (\beta + 1)$$

- Esto implica en la práctica que hay un nivel umbral de potencia recibida que hay que alcanzar

$$P_{R_{\text{umbral}}} = (N_0 B) \times \left(\frac{S}{N}\right)_{\text{umbral}} \rightarrow A_{c,\text{umbral}} = \sqrt{2P_{R_{\text{umbral}}}}$$