

Teoría de la Comunicación

Capítulo 3

Modulación y Detección en Canales Gaussianos

Marcelino Lázaro

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad Carlos III de Madrid



1 / 187

Índice de contenidos

- Introducción a los sistemas de comunicaciones digitales
- Representación geométrica de las señales
- Modelo de comunicación digital
- Diseño de cada elemento del sistema de comunicaciones
 - ▶ Receptor
 - ★ Demodulador
 - ★ Decisor (Decodificador)
 - ▶ Transmisor
 - ★ Codificador
 - ★ Modulador



Sistemas de comunicaciones analógicos y digitales

● Sistema de comunicaciones analógico

- ▶ Diseñado para enviar como información una forma de onda continua

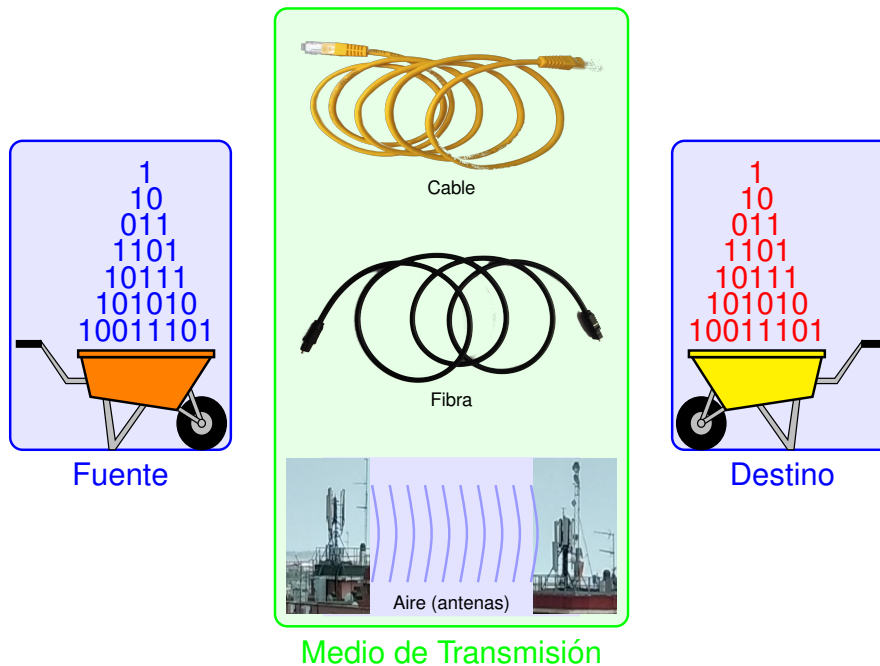


● Sistema de comunicaciones digital

- ▶ Diseñado para enviar como información una secuencia de símbolos
 - ★ Alfabeto finito: M posibles valores
 - ★ Ejemplo más común: Bits ($M = 2$): $\{0, 1\}$
 - Información: **0110001101110011010101110010011010...**
- ▶ Transmisión a una velocidad (tasa de símbolo) dada: R_s símbolos/s
 - ★ Se transmite un símbolo cada $T = \frac{1}{R_s}$ segundos
- ▶ Los símbolos han de convertirse en señales eléctricas para su transmisión
 - ★ Modulación Digital: Cada símbolo se asocia a una forma de onda
 - ★ Caso más simple: formas de onda de duración $T = \frac{1}{R_s}$ segundos

● Preponderancia de los sistemas de comunicaciones digitales

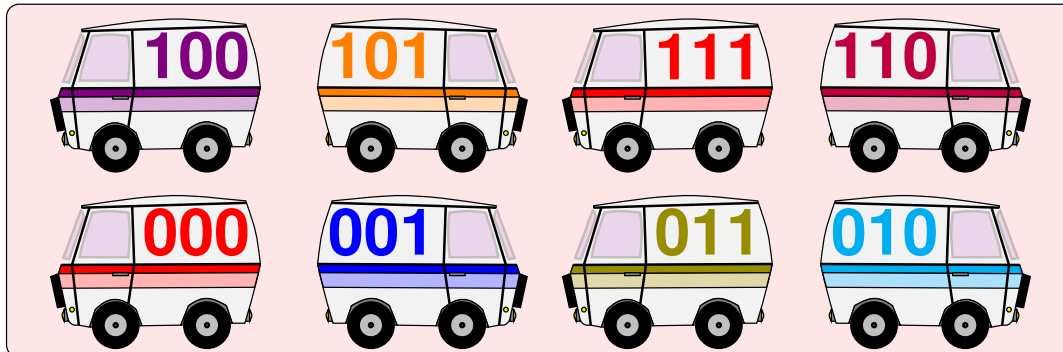
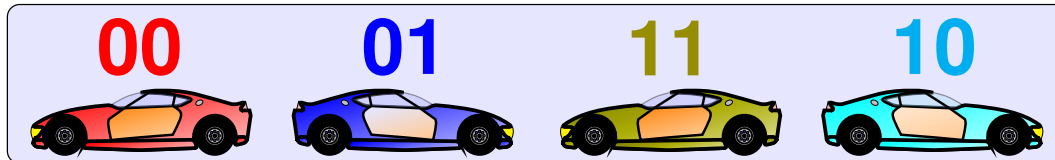
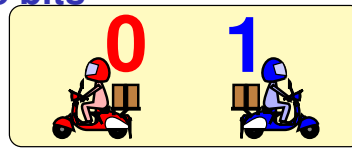
Modulación Digital - Conversión Bits-a-Señal



Símbolos : vehículos para transporte de bits

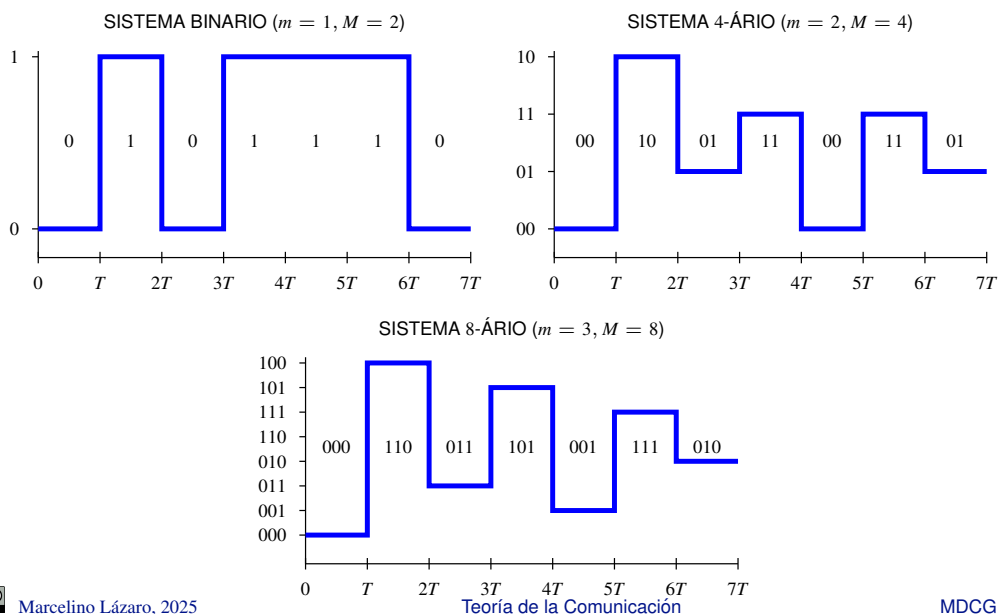
- Símbolo: bloque de m bits

★ Sistemas M -ários (con $M = 2^m$)



Modulación Digital - Ejemplo más simple

- Un bloque de m bits (símbolo) se asocia a un nivel de voltaje
 - ▶ Sistema M -ario (con $M = 2^m$ posibles símbolos)

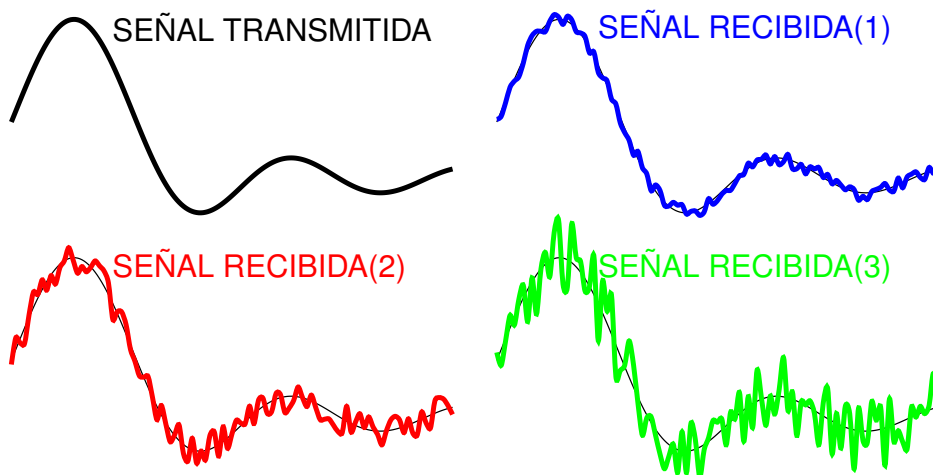


Ventajas de los Sistemas Digitales

- Capacidad de **regeneración**
- Existen técnicas de detección y corrección de errores
- Permite corregir la distorsión introducida por el canal (igualación)
 - ▶ Mucho más fácil y eficiente que en sistemas analógicos
- La información se puede encriptar (proteger)
- Permite utilizar TDM/TDMA y CDM/CDMA (además de FDM/FDMA) como mecanismo de multiplexación/acceso al medio
- Formato independiente del tipo de información (voz, datos, TV, etc.)
 - ▶ Naturaleza de la información: tasa de transmisión (símbolos/s, bits/s)
- Los circuitos son, en general
 - ▶ Más fiables
 - ▶ De menor coste
 - ▶ Más flexibles (programables)

Distorsión en señales analógicas

- Durante la transmisión siempre existe una distorsión
 - ▶ La señal recibida es distinta a la transmitida
 - ▶ Diseño: minimizar la distorsión (máxima fidelidad)
- Retransmisión: la distorsión se acumula



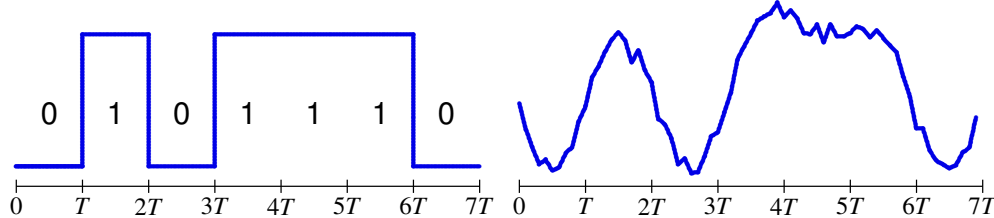
Regeneración digital

CODIFICACIÓN DE BITS - Sistema binario con pulsos rectangulares

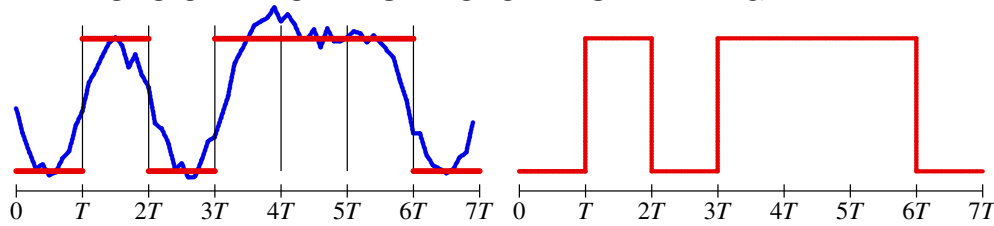
1 $\equiv$ Nivel alto

0 $\equiv$ Nivel bajo

SEÑAL DIGITAL TRANSMITIDA SEÑAL RECIBIDA DISTORSIONADA



IDENTIFICACIÓN DE CADA SÍMBOLO SEÑAL REGENERADA



Desventajas de los Sistemas Digitales

- Necesidad de sincronismo
 - ▶ Identificación del intervalo para cada símbolo
- Mayor ancho de banda
 - ▶ Menor a medida que las técnicas de compresión mejoran
- Muchas fuentes de información son de naturaleza analógica
 - ▶ Conversión A/D
 - ★ Muestreo
 - ★ Cuantificación $\rightarrow$ error de cuantificación
 - ▶ Conversión D/A
 - ★ Interpolación
 - ★ Filtrado paso bajo

Conversiones A/D y D/A se basan en el Teorema del muestreo de Nyquist (también conocido como Teorema de Nyquist-Shannon o de Whittaker-Nyquist-Kotelnikov-Shannon)

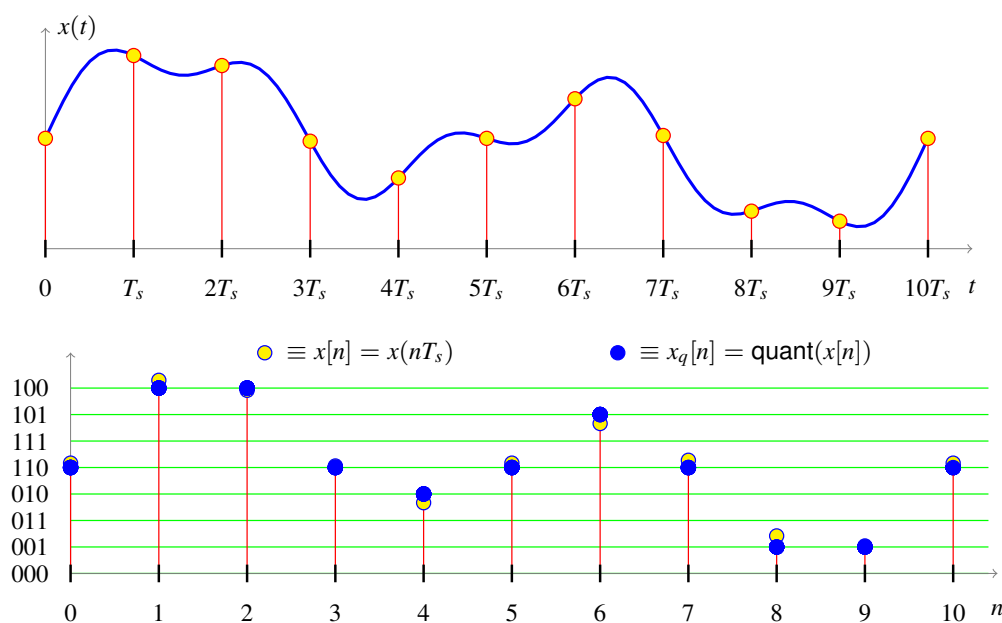
Conversión Analógico a Digital (A/D)

- Fuentes analógicas: amplitudes continuas, tiempo continuo
- Conversión analógico/digital (A/D):
 - ▶ Tiempo discreto: Muestreo a frecuencia f_s muestras/s
 - ▶ Amplitudes discretas: Cuantificación a n bits/muestra
 - ★ Ruido de cuantificación: sólo hay 2^n niveles de cuantificación
 - Diferencia entre valor muestreado y valor cuantificado
 - ★ Decrece a medida que se incrementa n
 - ▶ Tasa binaria (bits/s): $R_b \text{ (bits/s)} = f_s \text{ (muestras/s)} \times n \text{ (bits/muestra)}$
 Voz Digital: 64 kbits/s ($B = 4 \text{ kHz}$, $f_s = 2B = 8000 \text{ muestras/s}$, $n = 8 \text{ bits/muestra}$)
- Conversión digital/analógico (D/A):
 - ▶ Conversión de bits a muestras (cuantificadas)
 - ▶ Reconstrucción de la señal a partir de las muestras
 - ★ Interpolación con impulsos + filtrado paso bajo

$$x_i(t) = \sum_n x_q[n] \delta(t - nT_s) \rightarrow x_r(t) = x_i(t) * h_{LPF}(t)$$

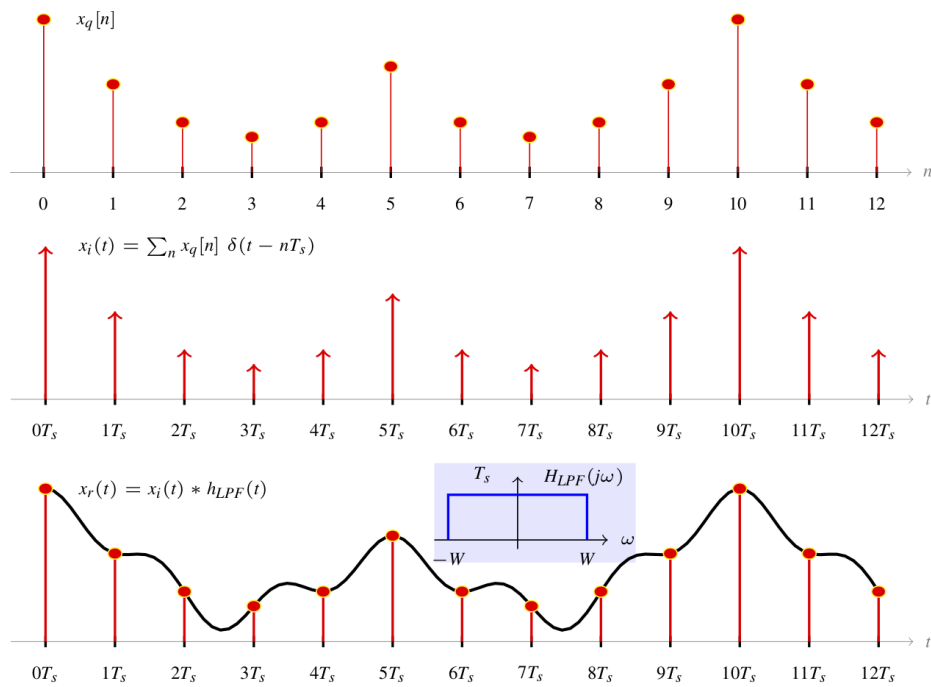
$$x_r(t) = \sum_n x_q[n] \text{sinc}\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right)$$

Conversión A/D: Muestreo + Cuantificación

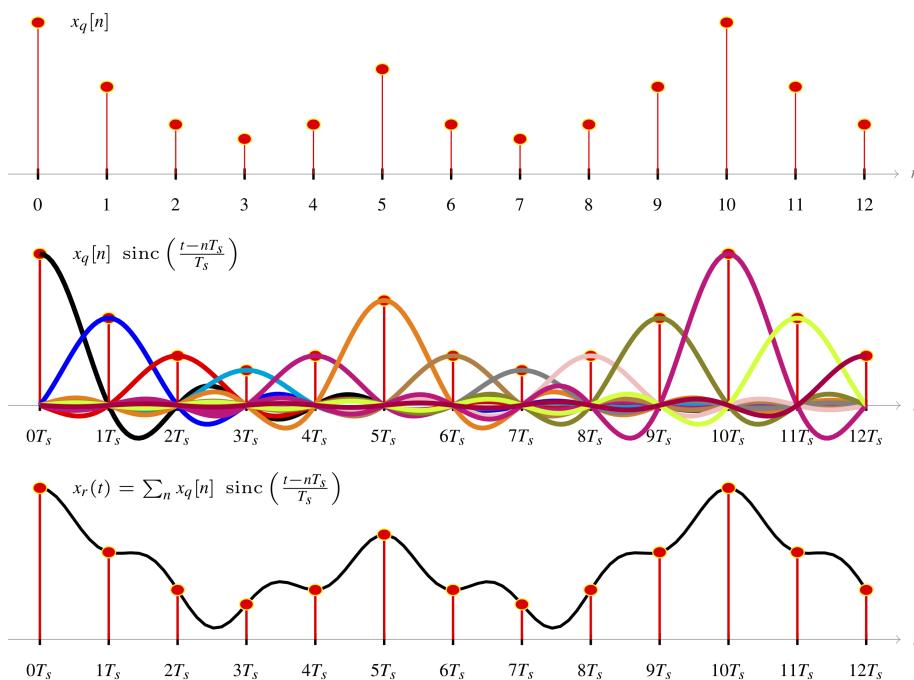


$$B_b[\ell] = 110 \ 100 \ 100 \ 110 \ 010 \ 110 \ 101 \ 110 \ 001 \ 001 \ 110 \ \dots$$

Conversión D/A: Interpolación con impulsos + Filtrado



Conversión D/A: Interpolación con sincs a T_s s



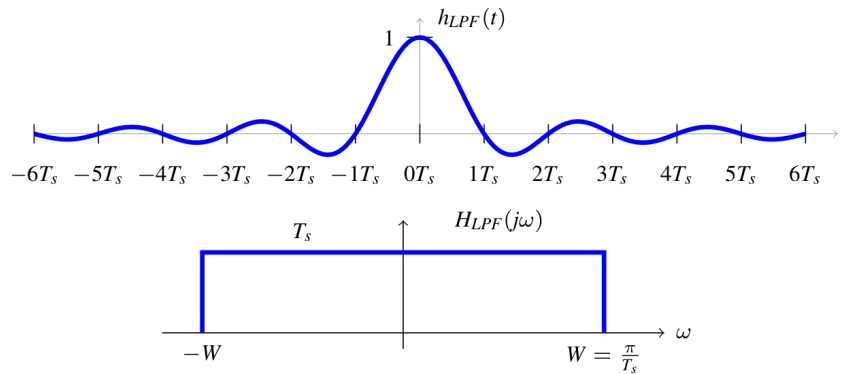
Equivalencia de las dos opciones

- Muestreo en nT_s : Frecuencia de muestreo

$$f_s = \frac{1}{T_s} = 2B \text{ Hz} \quad \left(\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = 2W \text{ rad/s} \right) \text{ con } W = 2\pi B$$

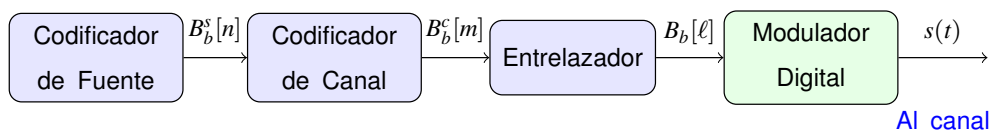
$$h_{LPF}(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right) \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad H_{LPF}(j\omega) = T_s \Pi\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right) = T_s \Pi\left(\frac{\omega}{2W}\right)$$

$$\text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right) * \delta(t - nT_s) = \text{sinc}\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right)$$



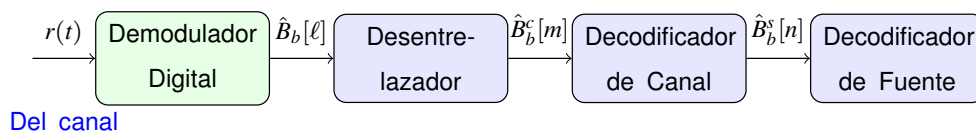
Transmisor/Receptor Digital - Bloques funcionales básicos

- Transmisor digital



- ▶ Modulador digital: Transmisión de una secuencia digital de símbolos (generalmente bits, $B_b[\ell]$) a través de una canal analógico de comunicaciones (señal electromagnética $s(t)$)

- Receptor digital



- ▶ Demodulador digital: Recuperación de la secuencia de símbolos (bits, $\hat{B}_b[\ell]$) a partir de la señal recibida través de una canal de comunicaciones, $r(t)$

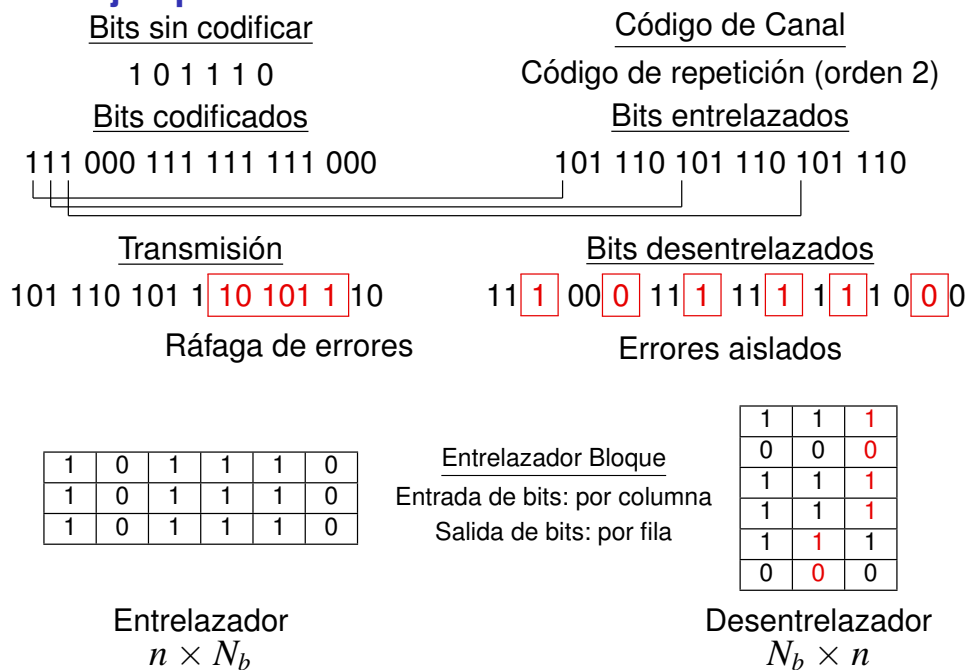
Codificadores de fuente y de canal

- Codificador de fuente
 - ▶ Reduce la redundancia de la fuente (compresión)
 - ▶ Reducción de la tasa binaria a transmitir
 - ▶ Ejemplos: MPEG o DivX (video), MP3 o OGG (audio), ZIP or RAR (ficheros),...
- Codificador de canal
 - ▶ Detección y corrección de errores
 - ▶ Introducción de redundancia de forma controlada
 - ▶ Capacidad de detección/corrección en función de su complejidad
 - ▶ Ejemplo más sencillo: códigos de repetición
 - ★ Código de repetición de orden 1: $0 \rightarrow 00$ $1 \rightarrow 11$
 - Detecta 1 error sobre un bloque de dos bits
 - ★ Código de repetición de orden 2: $0 \rightarrow 000$ $1 \rightarrow 111$
 - Detecta 2 errores o corrige 1 error (corrección basada en decisión por mayoría) sobre un bloque de tres bits

Entrelazado (Interleaving)

- Protección frente a errores de ráfaga
 - ▶ En combinación con el codificador de canal
- Reordenación de bits
 - ▶ Objetivo: transformar errores de ráfaga en errores aislados
 - ★ El decodificador de canal puede corregir relativamente pocos errores por bloque
- Clases de entrelazadores
 - ▶ Entrelazadores bloque
 - ▶ Entrelazadores convolucionales

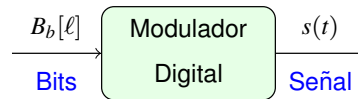
Entrelazado - Un ejemplo



Diseño de un sistema de comunicaciones

- Factores a considerar en el diseño
 - ▶ Tecnologías existentes
 - ▶ Coste
 - ▶ Calidad (prestaciones)
 - ★ Sist. analógicos: fidelidad → relación señal a ruido (S/N)
 - ★ Sist. digitales: tasa de errores (BER)
 - ▶ Consumo de recursos
 - ★ Potencia (energía)
 - Limitaciones físicas
 - Limitaciones administrativas
 - Limitaciones económicas
 - ★ Ancho de banda
 - Mismo tipo de limitaciones
- Objetivo fundamental de este capítulo:
 - ▶ Diseño de moduladores/demoduladores digitales considerando el compromiso entre prestaciones y consumo de recursos

Modulador digital: Conversión de bits ($B_b[\ell]$) en un señal



- Transmisión de una secuencia de bits $B_b[\ell]$ a una tasa binaria $R_b = \frac{1}{T_b}$ bits/s
 - ▶ Conversión en una señal eléctrica $s(t)$
- Transmisión de bits por bloques - Secuencia de símbolos
 - ▶ Segmentación de la secuencia $B_b[\ell]$ en bloques de m bits
 - ▶ Cada bloque de m bits es un símbolo
 - ★ 1 símbolo $\equiv m$ bits
 - ▶ Secuencia de símbolos $B[n]$
 - ★ Alfabeto de posibles símbolos: $M = 2^m$ símbolos: $B \in \{b_i\}_{i=0}^{M-1}$
 - ★ Tasa de símbolo $R_s = \frac{1}{T}$ símbolos/s (baudios)
 - ★ Relación entre tasas R_b / R_s : $R_b = m R_s$ (o también $T = m T_b$)
 - ▶ Transmisión de un símbolo (bloque de m bits) cada T seg.
- Conversión de secuencia de bits/símbolos a señal $s(t)$
 - ▶ Generación por tramos: “fragmentos” de T segundos (correspondientes a 1 símbolo)
 - ★ Intervalo de símbolo para $B[n]$: intervalo $nT \leq t < (n+1)T$

Conversión símbolo / señal - Modelo más simple

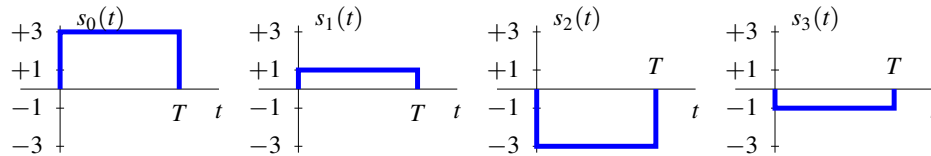
- Se estudia inicialmente el caso del primer símbolo
 - ▶ $B \equiv B[0]$
 - ▶ Intervalo de símbolo: $0 \leq t < T$
- Conversión símbolo / señal
 - ▶ Alfabeto de M posibles símbolos: $B \in \{b_0, b_1, \dots, b_{M-1}\}$
 - ▶ Definición de M formas de onda de duración T segundos

$\{s_0(t), s_1(t), \dots, s_{M-1}(t)\}$, definidas en $0 \leq t < T$
 - ▶ Asociación símbolo / forma de onda: $b_i \leftrightarrow s_i(t)$
 - ▶ Generación de la señal a transmitir
 - ★ Si $B = b_i$, entonces $s(t) = s_i(t)$
- Transmisión del símbolo $B[n]$
 - ▶ Intervalo de símbolo: $nT \leq t < (n+1)T$
 - ▶ Valor de símbolo: $B[n] = b_j$
 - ★ Se traslada la forma de onda asociada a b_j al intervalo

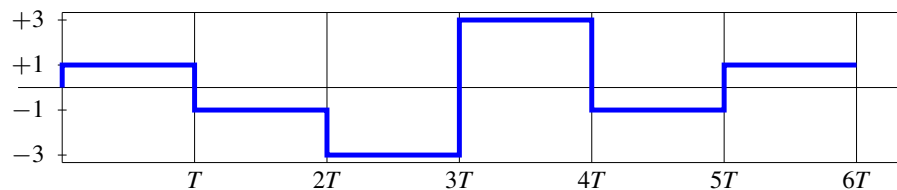
Si $B[n] = b_j$ entonces $s(t) = s_j(t - nT)$, en $nT \leq t < (n+1)T$

Ejemplo A - $M = 4$

- Número de bits por símbolo: $m = 2 \rightarrow M = 4$ símbolos
- Símbolos: $b_0 \equiv 00, b_1 \equiv 01, b_2 \equiv 10, b_3 \equiv 11$
- Señales seleccionadas (definidas en $0 \leq t < T$)

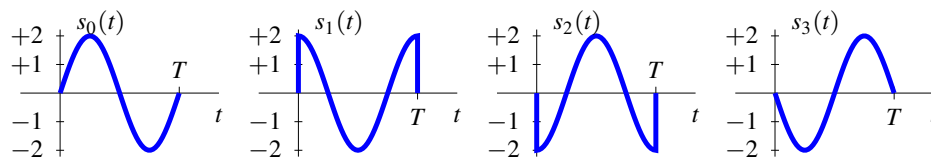


- Secuencia a transmitir: $B_b[\ell] = 011110001101 \dots$
- Secuencia de símbolos
 - ▶ Segmentación de $B_b[\ell]$: $01 \mid 11 \mid 10 \mid 00 \mid 11 \mid 01 \mid \dots$
 - ▶ Secuencia $B[n] = b_1 \mid b_3 \mid b_2 \mid b_0 \mid b_3 \mid b_1 \mid \dots$
- Señal transmitida
 - ▶ Generación por intervalos: $s(t) = \{s_1(t) \mid s_3(t - T) \mid s_2(t - 2T) \mid s_0(t - 3T) \mid s_3(t - 4T) \mid s_1(t - 5T) \mid \dots\}$

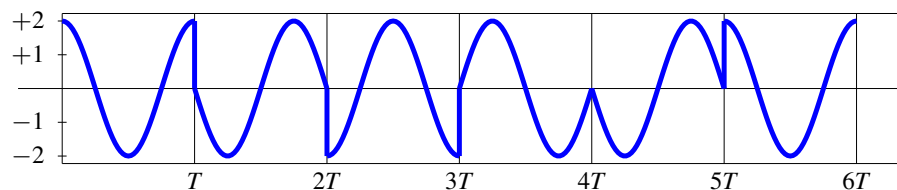


Ejemplo B - $M = 4$

- Número de bits por símbolo: $m = 2 \rightarrow M = 4$ símbolos
- Símbolos: $b_0 \equiv 00, b_1 \equiv 01, b_2 \equiv 10, b_3 \equiv 11$
- Señales seleccionadas (definidas en $0 \leq t < T$)

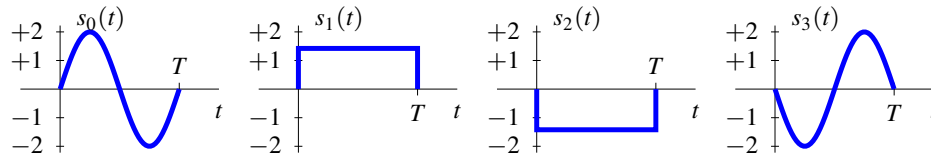


- Secuencia a transmitir: $B_b[\ell] = 011110001101 \dots$
- Secuencia de símbolos
 - ▶ Segmentación de $B_b[\ell]$: $01 \mid 11 \mid 10 \mid 00 \mid 11 \mid 01 \mid \dots$
 - ▶ Secuencia $B[n] = b_1 \mid b_3 \mid b_2 \mid b_0 \mid b_3 \mid b_1 \mid \dots$
- Señal transmitida
 - ▶ Generación por intervalos: $s(t) = \{s_1(t) \mid s_3(t - T) \mid s_2(t - 2T) \mid s_0(t - 3T) \mid s_3(t - 4T) \mid s_1(t - 5T) \mid \dots\}$

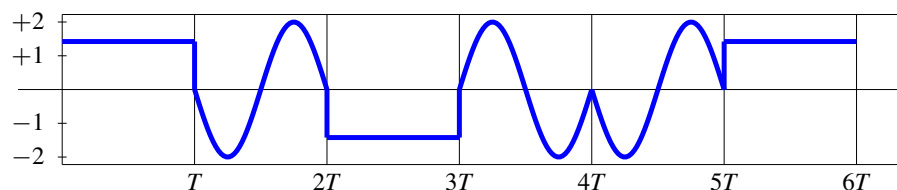


Ejemplo C - $M = 4$

- Número de bits por símbolo: $m = 2 \rightarrow M = 4$ símbolos
- Símbolos: $b_0 \equiv 00, b_1 \equiv 01, b_2 \equiv 10, b_3 \equiv 11$
- Señales seleccionadas (definidas en $0 \leq t < T$)

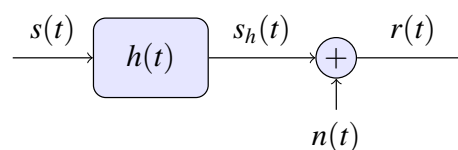


- Secuencia a transmitir: $B_b[\ell] = 011110001101 \dots$
- Secuencia de símbolos
 - ▶ Segmentación de $B_b[\ell]$: $01 \mid 11 \mid 10 \mid 00 \mid 11 \mid 01 \mid \dots$
 - ▶ Secuencia $B[n] = b_1 \mid b_3 \mid b_2 \mid b_0 \mid b_3 \mid b_1 \mid \dots$
- Señal transmitida
 - ▶ Generación por intervalos: $s(t) = \{s_1(t) \mid s_3(t-T) \mid s_2(t-2T) \mid s_0(t-3T) \mid s_3(t-4T) \mid s_1(t-5T) \mid \dots\}$



Transmisión a través del canal

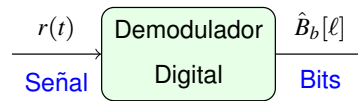
- Señales transmitida y recibida (entrada/salida del canal): $s(t)$ vs $r(t)$
 - ▶ La señal sufre distorsiones durante la transmisión
 - ▶ La señal recibida NO coincide con la señal transmitida: $r(t) \neq s(t)$
- Modelo de canal - Efectos de distorsión considerados
 - ▶ Distorsión lineal
 - ★ Modelo: sistema lineal e invariante $h(t) \xleftrightarrow{\mathcal{TF}} H(j\omega)$
 - ▶ Ruido térmico
 - ★ Modelo: proceso aleatorio $n(t)$ estacionario, ergódico, blanco, gaussiano, con densidad espectral de potencia $S_n(f) = \frac{N_0}{2}$, siendo $N_0 = k \times T(^{\circ}\text{K})$



- ▶ Señal recibida

$$r(t) = s(t) * h(t) + n(t)$$

Demodulador digital



- Recuperación de los bits $B_b[l]$ a partir de la señal recibida $r(t)$
 - ▶ La señal sufre distorsiones en la transmisión: $r(t) \neq s(t)$
- Procesado de $r(t)$ para recuperar los bits transmitidos
 - ▶ Procesado a tramos: partición en intervalos de símbolo
 - ▶ Estimación del símbolo (m bits) transmitido en cada intervalo
- Estima del n -ésimo símbolo n : $\hat{B}[n]$
 - ▶ Observación de la señal $r(t)$ en el n -ésimo intervalo

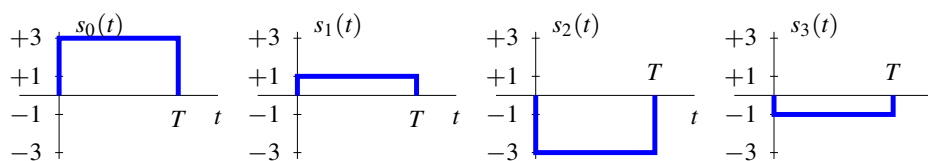
$$r(t) \text{ en } nT \leq t < (n+1)T$$

- ▶ Comparación de la señal con las M posibles formas de onda

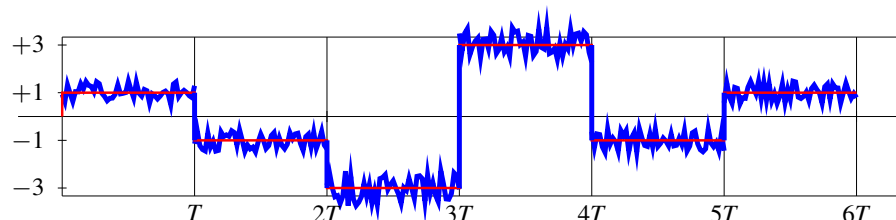
Si la “más parecida” es $s_v(t)$ entonces $\hat{B}[n] = b_v$

Ejemplo A - $M = 4$

- Símbolos $b_0 \equiv 00$, $b_1 \equiv 01$, $b_2 \equiv 10$, $b_3 \equiv 11$ y señales asociadas



- Señal recibida



- Detección de símbolos

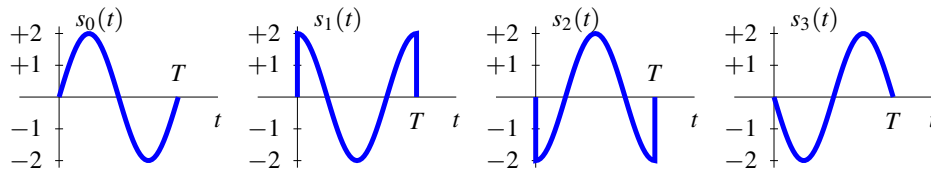
- ▶ Segmentación de la señal en intervalos de símbolo

- ★ $n = 0$, intervalo $0 \leq t < T$ - Señal “más parecida”: $s_1(t) \rightarrow \hat{B}[0] = b_1$
- ★ $n = 1$, intervalo $T \leq t < 2T$ - Señal “más parecida”: $s_3(t) \rightarrow \hat{B}[1] = b_3$
- ★ Siguiendo el mismo proceso: $\hat{B}[2] = b_2$, $\hat{B}[3] = b_0$, $\hat{B}[4] = b_3$, $\hat{B}[5] = b_1$

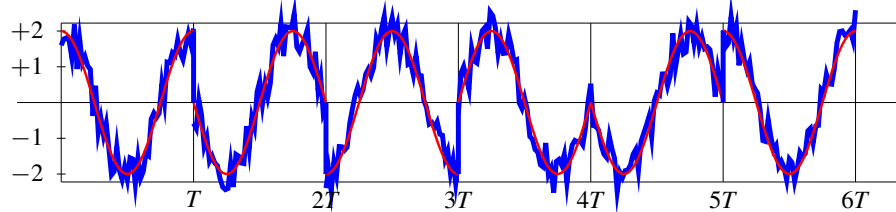
- Secuencia decidida: $\hat{B}[n] = b_1|b_3|b_2|b_0|b_3|b_1| \dots \Rightarrow \hat{B}_b[l]: 01|11|10|00|11|01| \dots$

Ejemplo B - $M = 4$

- Símbolos $b_0 \equiv 00$, $b_1 \equiv 01$, $b_2 \equiv 10$, $b_3 \equiv 11$ y señales asociadas



- Señal recibida



- Detección de símbolos

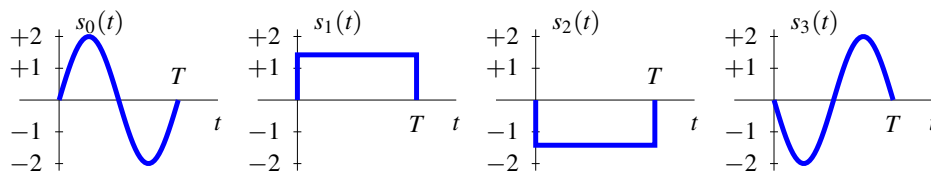
- ▶ Segmentación de la señal en intervalos de símbolo

- ★ $n = 0$, intervalo $0 \leq t < T$ - Señal "más parecida": $s_1(t) \rightarrow \hat{B}[0] = b_1$
 - ★ $n = 1$, intervalo $T \leq t < 2T$ - Señal "más parecida": $s_3(t) \rightarrow \hat{B}[1] = b_3$
 - ★ Siguiendo el mismo proceso: $\hat{B}[2] = b_2$, $\hat{B}[3] = b_0$, $\hat{B}[4] = b_3$, $\hat{B}[5] = b_1$

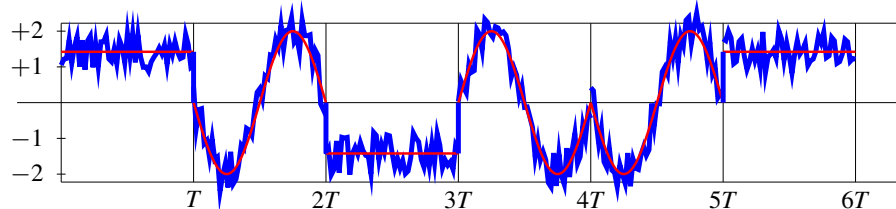
- Secuencia decidida: $\hat{B}[n] = b_1|b_3|b_2|b_0|b_3|b_1| \dots \Rightarrow \hat{B}_b[\ell]: 01|11|10|00|11|01| \dots$

Ejemplo C - $M = 4$

- Símbolos $b_0 \equiv 00$, $b_1 \equiv 01$, $b_2 \equiv 10$, $b_3 \equiv 11$ y señales asociadas



- Señal recibida



- Detección de símbolos

- ▶ Segmentación de la señal en intervalos de símbolo

- ★ $n = 0$, intervalo $0 \leq t < T$ - Señal "más parecida": $s_1(t) \rightarrow \hat{B}[0] = b_1$
 - ★ $n = 1$, intervalo $T \leq t < 2T$ - Señal "más parecida": $s_3(t) \rightarrow \hat{B}[1] = b_3$
 - ★ Siguiendo el mismo proceso: $\hat{B}[2] = b_2$, $\hat{B}[3] = b_0$, $\hat{B}[4] = b_3$, $\hat{B}[5] = b_1$

- Secuencia decidida: $\hat{B}[n] = b_1|b_3|b_2|b_0|b_3|b_1| \dots \Rightarrow \hat{B}_b[\ell]: 01|11|10|00|11|01| \dots$

Selección de las M fomas de onda - Factores a considerar

1 Prestaciones: probabilidad de equivocarse en el receptor (P_e)

- ▶ Decisión: señal $s_i(t)$ más parecida a la señal recibida $r(t)$
 - ★ P_e depende del “parecido” entre las señales $s_i(t)$
 - ★ Reducir errores: incrementar la “diferencia” entre las señales $s_i(t)$
- ▶ Medida de “diferencia” entre señales (distancia):
 - ★ Energía de la diferencia (raíz cuadrada)

$$d(s_i(t), s_k(t)) = \sqrt{\mathcal{E}\{s_i(t) - s_k(t)\}} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |s_i(t) - s_k(t)|^2 dt}$$

2 Energía de la señal transmitida

- ▶ La energía de la señal transmitida está limitada en la práctica
- ▶ Cuantificación: energía media por símbolo transmitido (E_s)
 - ★ Probabilidad de cada símbolo: $p_B(b_i) = P(B[n] = b_i)$
 - ★ Energía del símbolo $b_i \equiv$ energía de la señal $s_i(t)$
 - ★ Energía media por símbolo: promedio de la energía de los M símbolos

$$E_s = \sum_{i=0}^{M-1} p_B(b_i) \times \mathcal{E}\{s_i(t)\}, \text{ siendo } \mathcal{E}\{s_i(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} |s_i(t)|^2 dt$$

Selección de las M fomas de onda - Factores a considerar (II)

3 Adecuación al canal: considerando su respuesta $h(t) \xleftrightarrow{\mathcal{T}\mathcal{F}} H(j\omega)$

- ▶ Minimizar la distorsión que sufre la señal en la transmisión:

$$r(t) = s(t) * h(t) + n(t)$$

- ▶ Situación ideal: distorsión lineal introducida por el canal nula (sólo ruido)
 - ★ El ruido es el único elemento de distorsión:

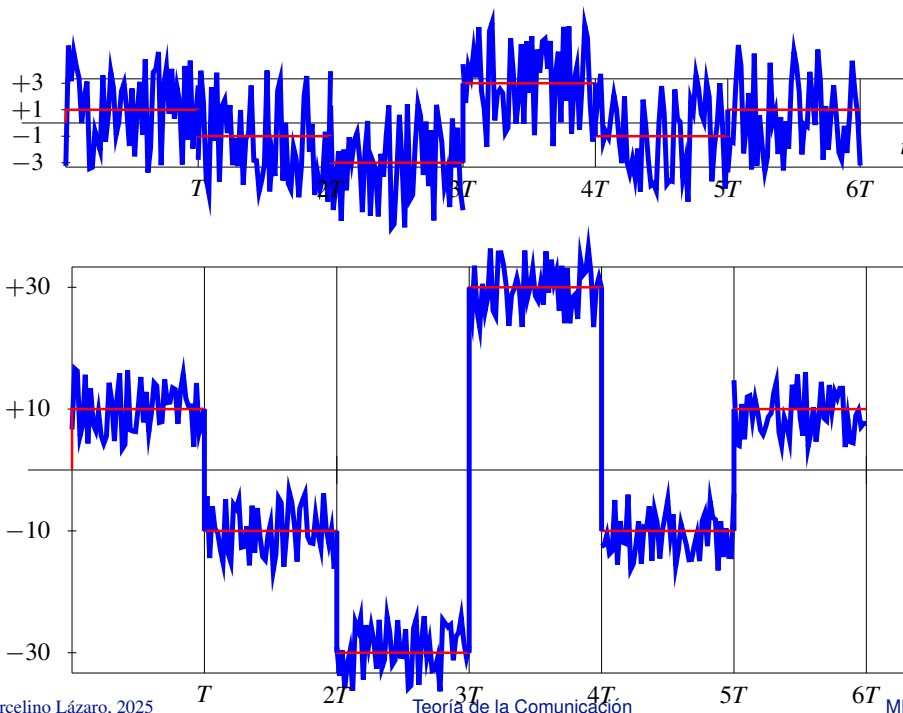
$$r(t) = s(t) + n(t)$$

- ★ Se consigue si:

$$s_i(t) * h(t) = s_i(t) \xleftrightarrow{\mathcal{T}\mathcal{F}} S_i(j\omega) \times H(j\omega) = S_i(j\omega)$$

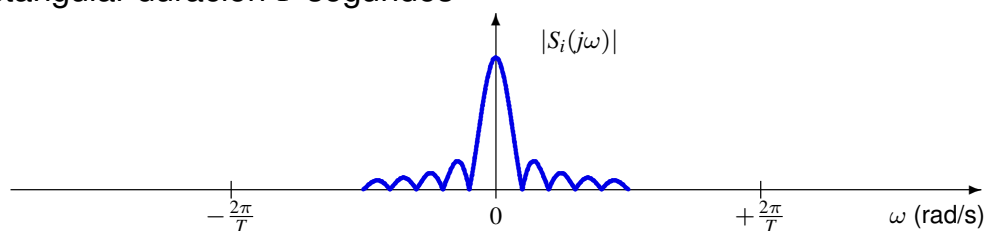
para $i = 0, 1, \dots, M - 1$

Escalado: más diferencia (distancia) / más energía



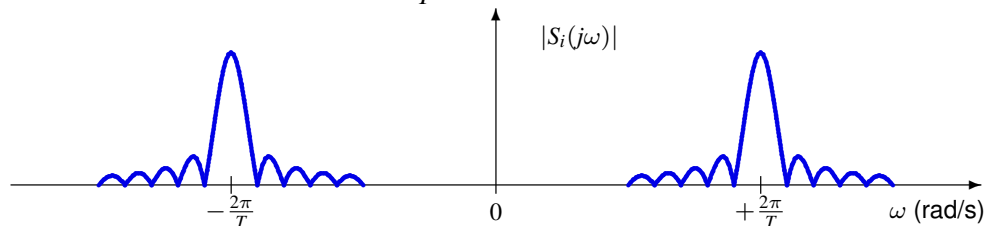
Respuesta en frecuencia de las señales

- Pulso rectangular duración T segundos



- ▶ Señales apropiadas para transmisión en canales con “buena respuesta” en bajas frecuencias

- Sinusoides (seno/coseno) con $\omega_c = \frac{2\pi}{T}$ rad/s (un ciclo en T segundos)



- ▶ Señales apropiadas para transmisión en canales con “buena respuesta” en torno a la frecuencia $\frac{2\pi}{T}$ radianes/s

Conveniencia de una representación vectorial de las señales

- Diseño del modulador digital
 - ▶ Selección de las M señales que permiten transmitir cada bloque de m bits
 - ▶ Factores a considerar
 - ★ Parecido (o diferencia) entre las señales
 - ★ Energía
 - ★ Adaptación al canal
- Considerar los 3 factores anteriores a la hora de seleccionar las M señales trabajando en el dominio temporal es un problema difícil de tratar
 - ▶ Se simplifica utilizando una representación vectorial de las señales
 - ★ Una señal se puede representar mediante un vector en un espacio de Hilbert
- Representación vectorial de las señales
 - ▶ Facilita el cálculo de la energía de cada señal
 - ▶ Facilita el cálculo del “*parecido/diferencia*” entre señales
 - ▶ Permite separar el problema de la adecuación de las señales al canal de los otros dos factores a considerar

Representación geométrica de señales - Espacios vectoriales

Un espacio vectorial ($\mathbb{V}$) es un conjunto de elementos (vectores) que poseen las siguientes propiedades:

- Ley de composición interna: suma (+)

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}, \text{ Operación suma: } \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{V}$$

que debe cumplir las siguientes propiedades

- a) Conmutativa: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V} \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$
- b) Asociativa: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{V} \quad \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$
- c) Existencia de elemento neutro (vector cero o nulo)

$$\exists \mathbf{0} \in \mathbb{V} : \forall \mathbf{x} \in \mathbb{V} \quad | \quad \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

- d) Existencia de elemento inverso

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{V}, \exists (-\mathbf{x}) \quad | \quad \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

Espacios vectoriales (II)

- Ley de composición externa: producto ($\times$) con escalares ($\mathbb{C}$)

$$\alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{x} \in \mathbb{V}, \text{ Operación producto: } \alpha \times \mathbf{x} \in \mathbb{V}$$

que debe cumplir las siguientes propiedades

- a) Asociativa:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}; \forall \mathbf{x} \in \mathbb{V}; \quad \alpha \times (\beta \times \mathbf{x}) = (\alpha \times \beta) \times \mathbf{x}$$

- b) Existencia de elemento neutro:

$$\exists e_n \in \mathbb{C} : \forall \mathbf{x} \in \mathbb{V}; \quad e_n \times \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

★ Habitualmente $e_n \equiv 1$

- c) Distributiva respecto a la suma:

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}; \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}; \quad \alpha \times (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha \times \mathbf{x} + \alpha \times \mathbf{y}$$

- d) Distributiva respecto al producto por un escalar:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}; \forall \mathbf{x} \in \mathbb{V}; \quad (\alpha + \beta) \times \mathbf{x} = \alpha \times \mathbf{x} + \beta \times \mathbf{x}$$

Espacios de Hilbert

- Espacio de Hilbert ¹
 - ▶ Espacio vectorial con producto escalar

$$\text{Notación: } \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - \text{Operación } f : (\mathbb{V}, \mathbb{V}) \rightarrow \mathbb{C}$$

- Propiedades de la operación producto escalar

a) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle^*$

b) $\langle (\alpha \times \mathbf{x} + \beta \times \mathbf{y}), \mathbf{z} \rangle = \alpha \times \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \beta \times \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$

c) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$

d) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ (vector nulo)

- El producto escalar define una norma para el espacio vectorial

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$$

¹ Estrictamente, el producto escalar debe inducir una distancia que en el espacio tiene la propiedad de completitud. En otro caso, es un espacio pre-Hilbert

Norma para el espacio vectorial

- Medida de distancia entre vectores

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

- Ángulo entre dos vectores

$$\operatorname{Re}\{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle\} = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos(\theta)$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\operatorname{Re}\{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle\}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} \right)$$

- Desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \quad (\text{igualdad: } \mathbf{y} = \alpha \times \mathbf{x})$$

- La definición del producto escalar no es única
 - ▶ Cada definición da lugar a un espacio de Hilbert distinto

Espacio de Hilbert para señales de energía en tiempo continuo (espacio L_2)

- Producto escalar que define el espacio L_2

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt$$

- Norma inducida por este producto escalar

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt} = \sqrt{\mathcal{E}\{x(t)\}}$$

- Distancia entre dos señales

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - y(t)|^2 dt} = \sqrt{\mathcal{E}\{x(t) - y(t)\}}$$

Espacio de Hilbert para señales de energía en tiempo discreto (espacio ℓ_2)

- Producto escalar que define el espacio ℓ_2

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] y^*[n]$$

- Norma inducida por este producto escalar

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2} = \sqrt{\mathcal{E}\{x[n]\}}$$

- Distancia: distancia euclídea

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n] - y[n]|^2} = \sqrt{\mathcal{E}\{x[n] - y[n]\}}$$

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

- Desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$$

- Expresiones para los espacios de señales de energía L_2 y ℓ_2

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt}$$

$$\left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] y^*[n] \right| \leq \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2} \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |y[n]|^2}$$

- Igualdad si los dos vectores son linealmente dependientes (proporcionales)

$$\mathbf{y} = \alpha \times \mathbf{x}, \text{ para cualquier } \alpha \in \mathbb{C}$$

- ▶ Particulación para espacios de señales de energía L_2 y ℓ_2

$$y(t) = \alpha \times x(t) \text{ ó } y[n] = \alpha \times x[n]$$

Representación en una base del espacio vectorial

- Base de un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ de dimensión D : subconjunto de D vectores

$$\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{D-1}\} \in \mathbb{H}$$

- ▶ Permite representar cualquier vector del espacio mediante una combinación lineal

$$\mathbf{x} = \sum_{n=0}^{D-1} c_n(\mathbf{x}) \phi_n$$

- ★ D coeficientes únicos $c_n(\mathbf{x})$ ($n \in \{0, 1, \dots, D-1\}$) para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{H}$ (coordenadas)

- Base ortogonal:

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = 0, \forall n \neq m$$

- Base ortonormal: base ortogonal con elementos normalizados $\langle \phi_n, \phi_n \rangle = 1$

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = 0, \forall n \neq m \text{ y también } \langle \phi_n, \phi_n \rangle = 1 \rightarrow \|\phi_n\| = 1$$

- ▶ Coeficientes en una base ortonormal:

$$c_n(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \phi_n \rangle$$

Procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt

- Objetivo (general)
 - ▶ Encontrar una base que permita representar un conjunto de vectores
- Objetivo particular
 - ▶ Encontrar una base ortonormal para representar un conjunto de M señales
 - ★ Señales (M)

$$\{s_i(t)\}_{i=0}^{M-1} = \{s_0(t), s_1(t), \dots, s_{M-1}(t)\}$$

- ★ Base ortonormal - N señales (dimensión N) - $N \leq M$

$$\{\phi_j(t)\}_{j=0}^{N-1} = \{\phi_0(t), \phi_1(t), \dots, \phi_{N-1}(t)\}$$

Propiedades de los elementos de la base

$$\langle \phi_j(t), \phi_k(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_j(t) \phi_k^*(t) dt = \begin{cases} 0, & \text{if } k \neq j \\ 1, & \text{if } k = j \end{cases} = \delta[j - k]$$

$$\|\phi_j(t)\| = \sqrt{\langle \phi_j(t), \phi_j(t) \rangle} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_j(t)|^2 dt} = \sqrt{\mathcal{E}\{\phi_j(t)\}} = 1$$

Vector que representa a $s_i(t)$

$$s_i(t) = \sum_{j=0}^{N-1} a_{i,j} \phi_j(t)$$

$$a_{i,j} = \langle s_i(t), \phi_j(t) \rangle$$

$$\mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} a_{i,0} \\ a_{i,1} \\ \vdots \\ a_{i,N-1} \end{bmatrix}$$

Obtención de la base

- Paso 0: Elegir $s_0(t)$ con energía no nula

$$\phi_0(t) = \frac{s_0(t)}{\sqrt{\mathcal{E}_0}}, \quad \mathcal{E}_0 = \mathcal{E}\{s_0(t)\} : \text{Energía de } s_0(t)$$

- Paso 1

- ▶ Proyección de $s_1(t)$ sobre $\phi_0(t)$

$$a_{1,0} = \langle s_1(t), \phi_0(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) \phi_0^*(t) dt$$

- ▶ Ortogonalización - Se sustrae esta proyección

$$d_1(t) = s_1(t) - a_{1,0} \phi_0(t)$$

- ▶ Normalización

$$\phi_1(t) = \frac{d_1(t)}{\sqrt{\mathcal{E}_1}}, \quad \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}\{d_1(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} |d_1(t)|^2 dt$$

Obtención de la base (II)

- Paso k

- ▶ Proyección de $s_k(t)$ sobre $\{\phi_0(t), \phi_1(t), \dots, \phi_{k-1}(t)\}$: elementos ya disponibles de la base

$$a_{k,j} = \langle s_k(t), \phi_j(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s_k(t) \phi_j^*(t) dt, \quad j = 0, 1, \dots, k-1$$

- ▶ Ortogonalización - Sustracción de las proyecciones

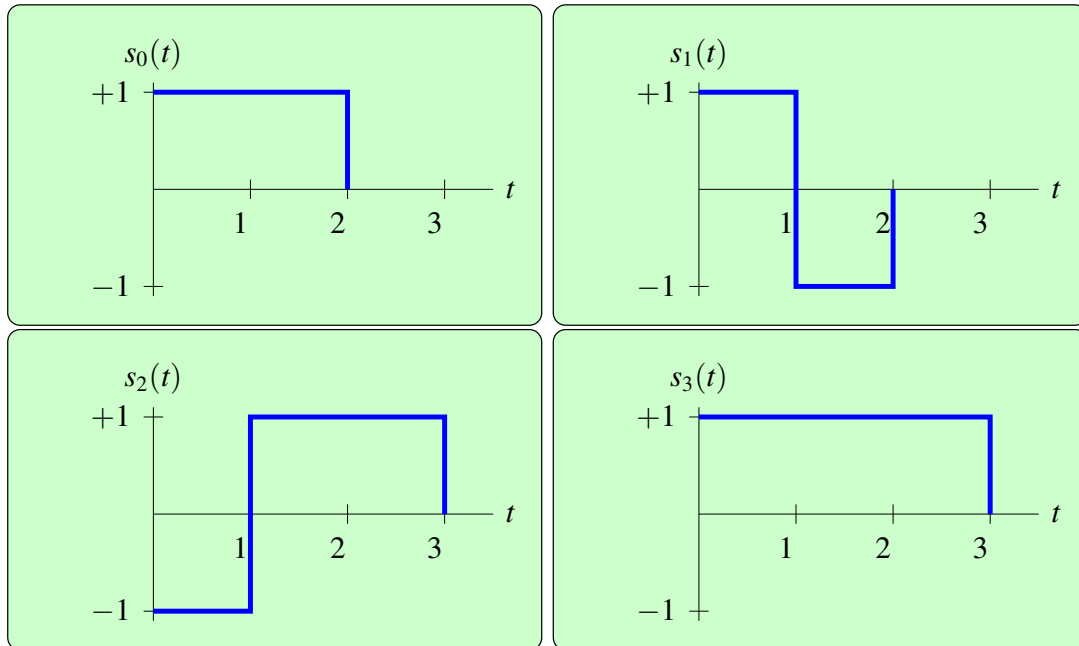
$$d_k(t) = s_k(t) - \sum_{j=0}^{k-1} a_{k,j} \phi_j(t)$$

- ★ Si $d_k(t) = 0$: No es necesario un nuevo elemento para representar $s_k(t)$

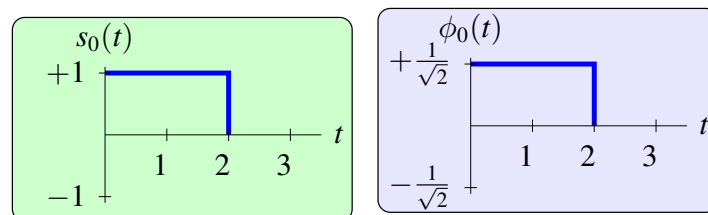
- ▶ Normalización

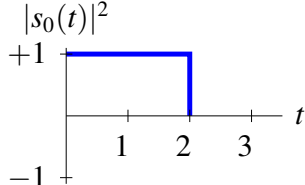
$$\phi_k(t) = \frac{d_k(t)}{\sqrt{\mathcal{E}_k}}, \quad \mathcal{E}_k = \mathcal{E}\{d_k(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} |d_k(t)|^2 dt$$

Ejemplo Gram-Schmidt - Señales



Ejemplo Gram-Schmidt - Paso 0

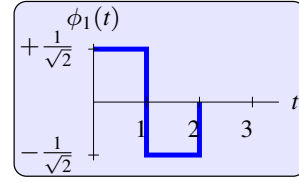
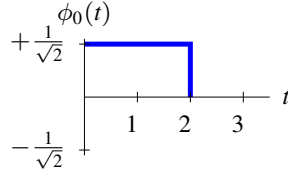
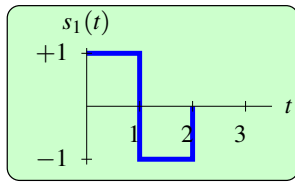


$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}\{s_0(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} |s_0(t)|^2 dt = 2$$


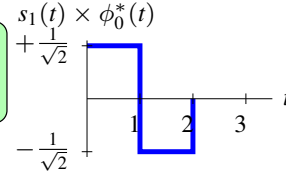
The plot shows $|s_0(t)|^2$ over the time interval $t \in [0, 3]$. The vertical axis ranges from -1 to +1. The signal is a rectangular pulse with amplitude +1 from $t=0$ to $t=2$, and 0 elsewhere.

$$\phi_0(t) = \frac{s_0(t)}{\sqrt{\mathcal{E}_0}} = \frac{s_0(t)}{\sqrt{2}}$$

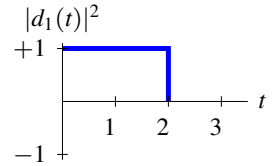
Ejemplo Gram-Schmidt - Paso 1



$$a_{1,0} = \langle s_1(t), \phi_0(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) \times \phi_0^*(t) dt = 0$$

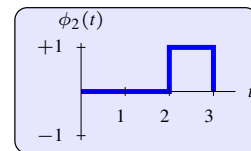
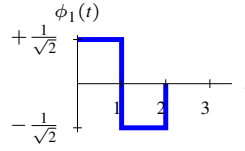
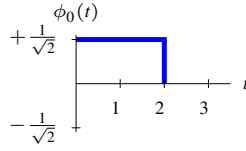
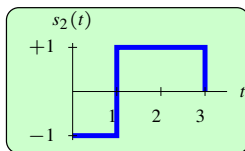


$$d_1(t) = s_1(t) - a_{1,0} \phi_0(t) = s_1(t) \quad \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}\{d_1(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} |d_1(t)|^2 dt = 2$$

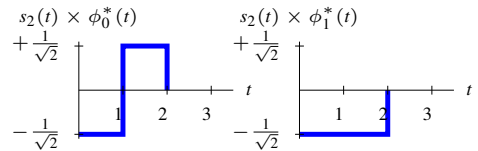


$$\phi_1(t) = \frac{d_1(t)}{\sqrt{\mathcal{E}_1}} = \frac{s_1(t)}{\sqrt{2}}$$

Ejemplo Gram-Schmidt - Paso 2

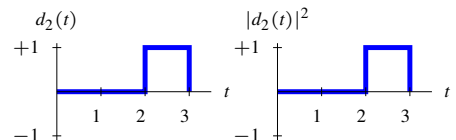


$$a_{2,0} = \langle s_2(t), \phi_0(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t) \times \phi_0^*(t) dt = 0$$



$$a_{2,1} = \langle s_2(t), \phi_1(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t) \times \phi_1^*(t) dt = -\sqrt{2}$$

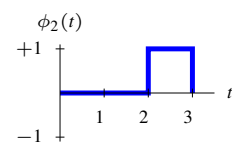
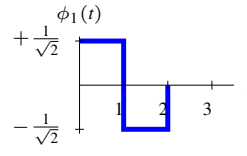
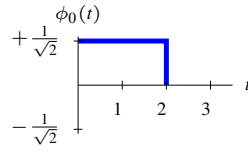
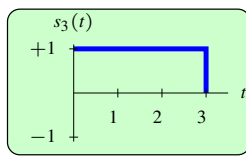
$$d_2(t) = s_2(t) - a_{2,0} \phi_0(t) - a_{2,1} \phi_1(t)$$



$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}\{d_2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} |d_2(t)|^2 dt = 1$$

$$\phi_2(t) = \frac{d_2(t)}{\sqrt{\mathcal{E}_2}}$$

Ejemplo Gram-Schmidt - Paso 3



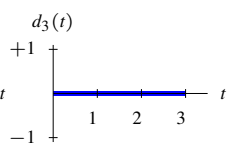
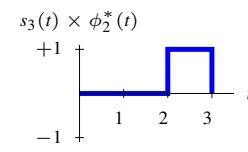
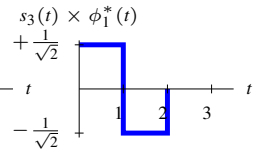
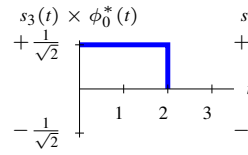
$$a_{3,0} = \langle s_3(t), \phi_0(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s_3(t) \times \phi_0^*(t) dt = \sqrt{2}$$

$$a_{3,1} = \langle s_3(t), \phi_1(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s_3(t) \times \phi_1^*(t) dt = 0$$

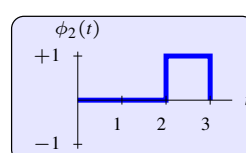
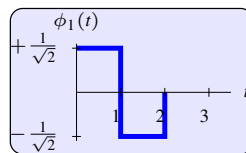
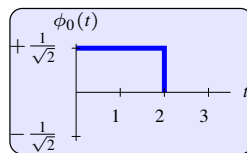
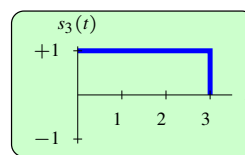
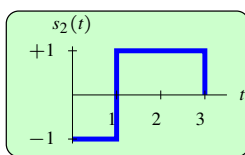
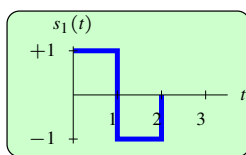
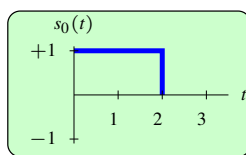
$$a_{3,2} = \langle s_3(t), \phi_2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s_3(t) \times \phi_2^*(t) dt = 1$$

$$d_3(t) = s_3(t) - a_{3,0} \phi_0(t) - a_{3,1} \phi_1(t) - a_{3,2} \phi_2(t) = 0$$

$s_3(t)$ NO genera un nuevo elemento de la base $\phi_3(t)$



Ejemplo Gram-Schmidt - Base



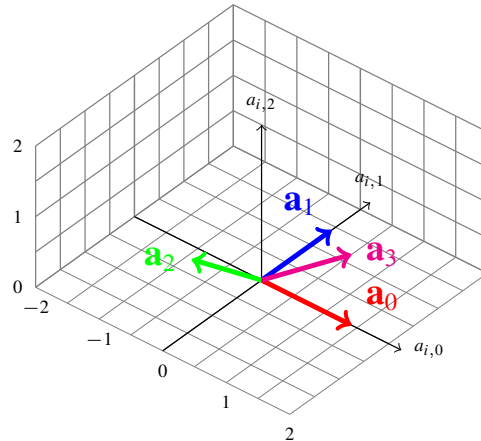
$$\mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} a_{i,0} \\ a_{i,1} \\ a_{i,2} \end{bmatrix} \Rightarrow s_i(t) = a_{i,0} \phi_0(t) + a_{i,1} \phi_1(t) + a_{i,2} \phi_2(t)$$

$$\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo Gram-Schmidt - Coordenadas

- Representación vectorial de las señales

$$\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Ejemplo Gram-Schmidt - Base alternativa

- Base

$$\phi'_0(t) = \begin{cases} 1, & \text{if } 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

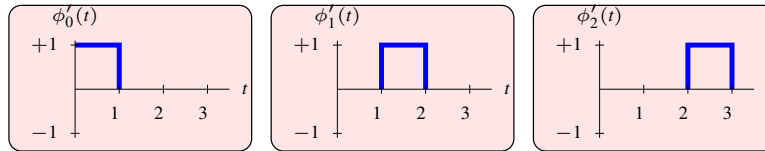
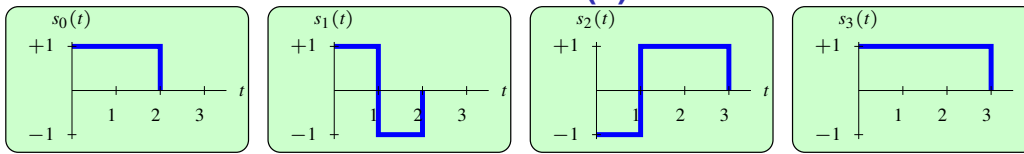
$$\phi'_1(t) = \begin{cases} 1, & \text{if } 1 \leq t < 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\phi'_2(t) = \begin{cases} 1, & \text{if } 2 \leq t < 3 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Coordenadas en la nueva base

$$\mathbf{a}'_0 = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}'_1 = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}'_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}'_3 = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo Gram-Schmidt - Base alternativa (II)



$$\langle \phi'_j(t), \phi'_k(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi'_j(t) \phi'^*_k(t) dt = \begin{cases} 0, & \text{si } k \neq j \\ 1, & \text{si } k = j \end{cases} = \delta[j - k]$$

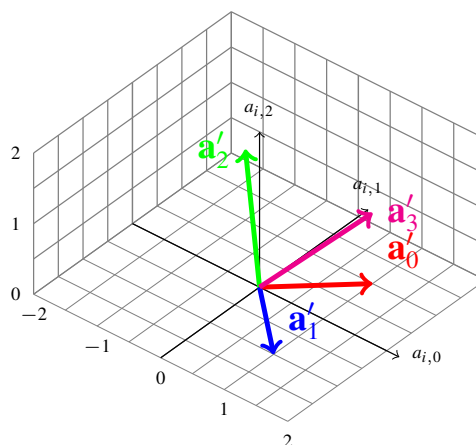
$$\mathbf{a}'_i = \begin{bmatrix} a'_{i,0} \\ a'_{i,1} \\ a'_{i,2} \end{bmatrix} \Rightarrow s_i(t) = a'_{i,0} \phi'_0(t) + a'_{i,1} \phi'_1(t) + a'_{i,2} \phi'_2(t)$$

$$\mathbf{a}'_0 = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}'_1 = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}'_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}'_3 = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo Gram-Schmidt - Base alternativa - Coordenadas

- Representación vectorial de las señales

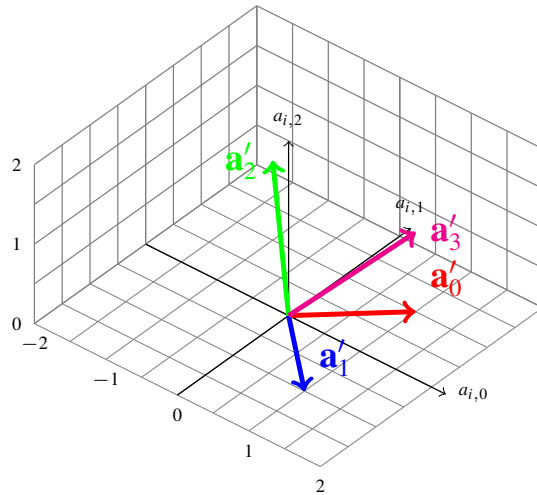
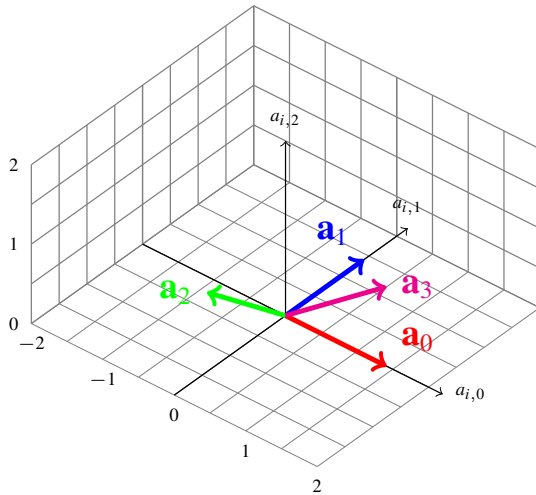
$$\mathbf{a}'_0 = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}'_1 = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}'_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}'_3 = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix}$$



Sistemas de coordenadas alternativos

$$\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}'_0 = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}'_1 = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}'_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}'_3 = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix}$$



Ejemplo Gram-Schmidt - Energías y distancias

- Energía de una señal y distancias entre señales se calculan de forma eficiente a partir de las representaciones vectoriales de las señales
 - Energía de una señal

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{E} \{s_i(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} |s_i(t)|^2 dt = \|\mathbf{a}_i\|^2 = \sum_{j=0}^{N-1} |a_{i,j}|^2$$

- Distancia entre dos señales

$$\begin{aligned} d(s_i(t), s_k(t)) &= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |s_i(t) - s_k(t)|^2 dt} \\ &= \|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_k\| = \sqrt{\sum_{j=0}^{N-1} |a_{i,j} - a_{k,j}|^2} \end{aligned}$$

Ejemplo Gram-Schmidt - Energías y distancias (II)

- Coordenadas en la primera base

$$\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Coordenadas en la segunda base

$$\mathbf{a}'_0 = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}'_1 = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}'_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}'_3 = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

- Energías y distancias (independientemente de la base elegida)

$$\mathcal{E}_0 = 2, \mathcal{E}_1 = 2, \mathcal{E}_2 = 3, \mathcal{E}_3 = 3$$

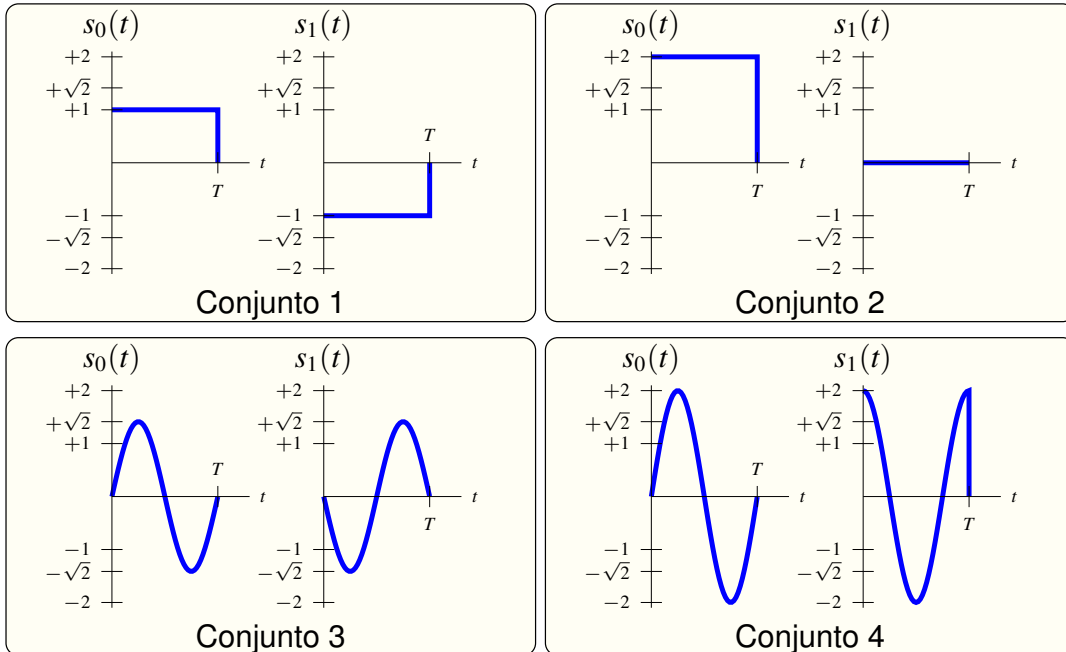
$$d(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1) = 2, d(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_2) = \sqrt{5}, d(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_3) = 1$$

$$d(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \sqrt{9}, d(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_3) = \sqrt{5}, d(\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3) = 2$$

Ejemplo Gram-Schmidt - Conclusiones

- La base ortonormal que permite representar las M señales no es única
 - ▶ Es válido cualquier conjunto de N señales ortonormales que permitan representar cada una de las M señales de forma exacta
- La energía de cada una de las señales y la distancia entre las mismas será la misma para cualquier base ortonormal
 - ▶ La elección de una base u otra sólo supondrá una rotación del sistema de referencia

Candidatos $\{s_i(t)\}_{i=0}^{M-1}$ - Ejemplo para $M = 2 : \{s_0(t), s_1(t)\}$



Distancias entre las señales

$$d(s_i(t), s_j(t)) = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |s_i(t) - s_j(t)|^2 dt}$$

● Primer conjunto

$$d(s_0(t), s_1(t)) = \sqrt{\int_0^T |1 - (-1)|^2 dt} = 2\sqrt{T}$$

● Segundo conjunto

$$d(s_0(t), s_1(t)) = \sqrt{\int_0^T |2 - 0|^2 dt} = 2\sqrt{T}$$

Distancias entre las señales

● Tercer conjunto

$$\begin{aligned} d(s_0(t), s_1(t)) &= \sqrt{\int_0^T \left| \sqrt{2} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi t}{T} \right) - \left(-\sqrt{2} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \right) \right|^2 dt} \\ &= \sqrt{\int_0^T 8 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{2\pi t}{T} \right) dt} = \sqrt{4 \left[t - \frac{T}{2\pi} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \cos \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \right]_0^T} = 2\sqrt{T} \end{aligned}$$

● Cuarto conjunto

$$\begin{aligned} d(s_0(t), s_1(t)) &= \sqrt{\int_0^T \left| 2 \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi t}{T} \right) - \left(2 \cos \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \right) \right|^2 dt} \\ &= \sqrt{\int_0^T 4 - 8 \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \cos \left(\frac{2\pi t}{T} \right) dt} = 2\sqrt{T} \end{aligned}$$

ya que

$$\int_0^T 8 \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \cos \left(\frac{2\pi t}{T} \right) dt = \left[\frac{2T}{\pi} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \right]_0^T = 0$$

Energía media por símbolo

● Conjunto 1

$$\begin{aligned} E_s &= E[\mathcal{E}\{s(t)\}] = E \left[\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt \right] \\ &= \sum_{i=0}^{M-1} P(s(t) = s_i(t)) \int_{-\infty}^{\infty} |s_i(t)|^2 dt \end{aligned}$$

$$E_s = \frac{1}{2} \int_0^T |1|^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T |-1|^2 dt = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}T = T$$

● Conjunto 2

$$E_s = \frac{1}{2} \int_0^T |2|^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T |0|^2 dt = \frac{1}{2}4T + \frac{1}{2}0 = 2T$$

Energía media por símbolo

$$\int_0^T \cos^2 \left(\frac{2\pi t}{T} \right) dt = \frac{T}{2\pi} \left[\frac{\pi t}{T} + \frac{1}{2} \cos \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \sin \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \right]_0^T = \frac{T}{2}$$

$$\int_0^T \sin^2 \left(\frac{2\pi t}{T} \right) dt = \frac{T}{2\pi} \left[\frac{\pi t}{T} - \frac{1}{2} \cos \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \sin \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \right]_0^T = \frac{T}{2}$$

● Conjunto 3

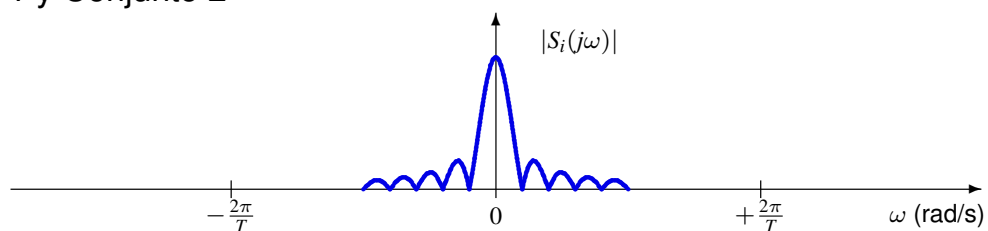
$$E_s = \frac{1}{2} (\sqrt{2})^2 \frac{T}{2} + \frac{1}{2} (\sqrt{2})^2 \frac{T}{2} = T$$

● Conjunto 4

$$E_s = \frac{1}{2} (2)^2 \frac{T}{2} + \frac{1}{2} (2)^2 \frac{T}{2} = 2T$$

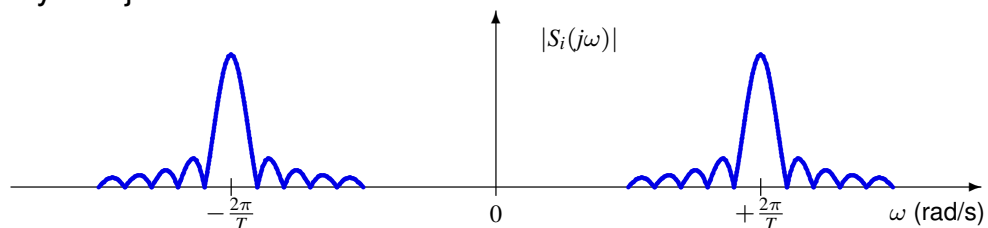
Respuesta en frecuencia de las señales

● Conjunto 1 y Conjunto 2



- ▶ Señales apropiadas para transmisión en canales con “buena respuesta” en bajas frecuencias

● Conjunto 3 y Conjunto 4



- ▶ Señales apropiadas para transmisión en canales con “buena respuesta” en torno a la frecuencia $\frac{2\pi}{T}$ radianes/s

Base y constelación

- Una base ortonormal para un espacio de M señales
 - Vector representando cada señal

$$s_i(t) \leftrightarrow \mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} a_{i,0} \\ a_{i,1} \\ \vdots \\ a_{i,N-1} \end{bmatrix}$$

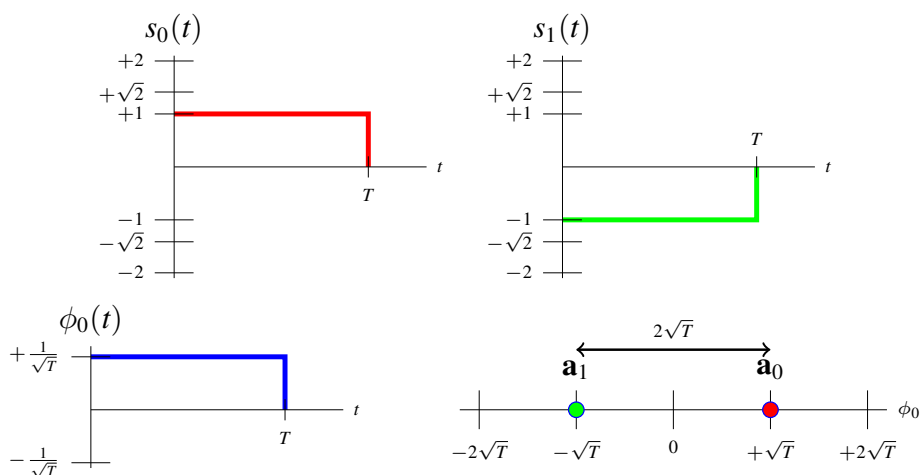
$$s_i(t) = \sum_{j=0}^{N-1} a_{i,j} \phi_j(t)$$

- La norma facilita medir energías y distancias

$$\mathcal{E}\{s_i(t)\} = \|\mathbf{a}_i\|^2 = \sum_{j=0}^{N-1} |a_{i,j}|^2$$

$$d(s_i(t), s_k(t)) = \|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_k\| = \sqrt{\sum_{j=0}^{N-1} |a_{i,j} - a_{k,j}|^2}$$

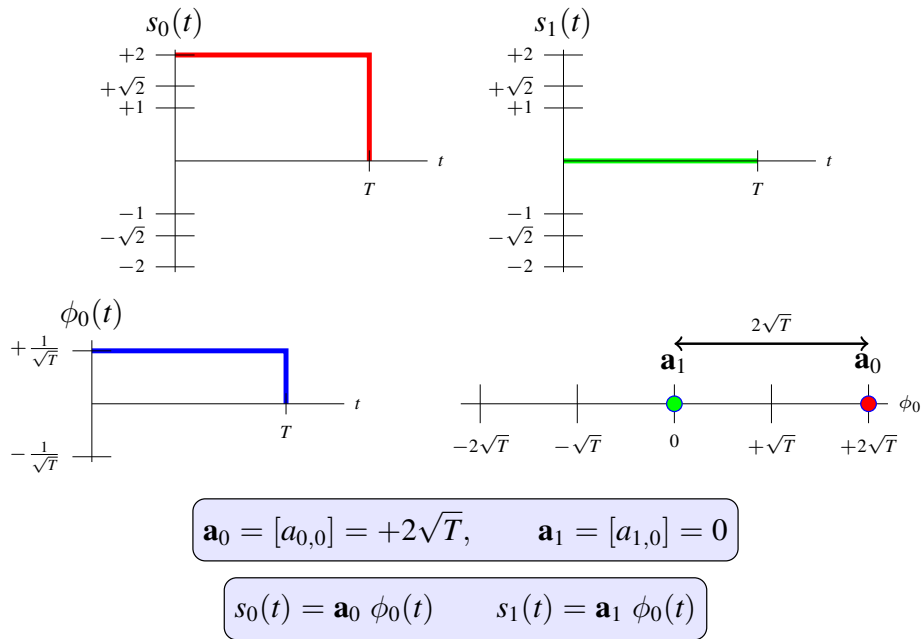
Base y constelación - Conjunto 1



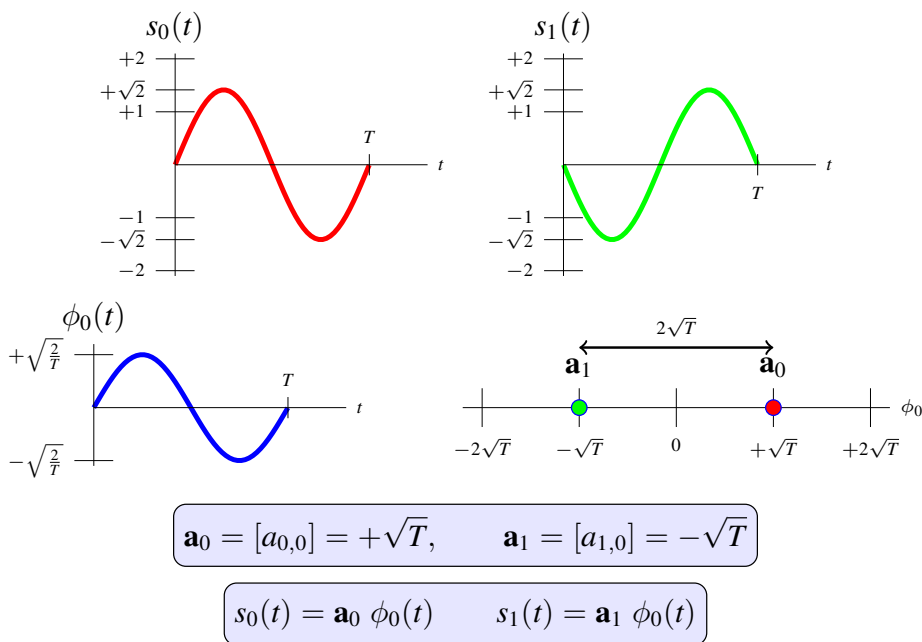
$$\mathbf{a}_0 = [a_{0,0}] = +\sqrt{T}, \quad \mathbf{a}_1 = [a_{1,0}] = -\sqrt{T}$$

$$s_0(t) = \mathbf{a}_0 \phi_0(t) \quad s_1(t) = \mathbf{a}_1 \phi_0(t)$$

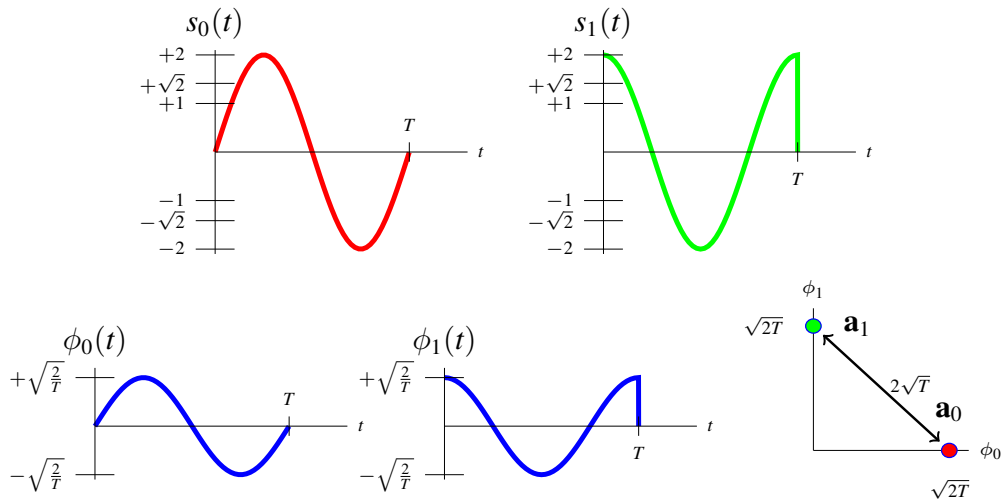
Base y constelación - Conjunto 2



Base y constelación - Conjunto 3



Base y constelación - Conjunto 4



$$\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} a_{0,0} \\ a_{0,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2T} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{1,0} \\ a_{1,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2T} \end{bmatrix}$$

$$s_0(t) = a_{0,0} \phi_0(t) + a_{0,1} \phi_1(t) \quad s_1(t) = a_{1,0} \phi_0(t) + a_{1,1} \phi_1(t)$$

Distancias entre las señales - Constelación

$$d(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_k) = \|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j\| = \sqrt{\sum_{j=0}^{N-1} |a_{i,j} - a_{k,j}|^2}$$

● Conj. 1: $\mathbf{a}_0 = +\sqrt{T}, \mathbf{a}_1 = -\sqrt{T}$ $d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1) = \sqrt{|(+\sqrt{T}) - (-\sqrt{T})|^2} = 2\sqrt{T}$

● Conj. 2: $\mathbf{a}_0 = 2\sqrt{T}, \mathbf{a}_1 = 0$ $d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1) = \sqrt{|(+2\sqrt{T}) - (0)|^2} = 2\sqrt{T}$

● Conj. 3: $\mathbf{a}_0 = +\sqrt{T}, \mathbf{a}_1 = -\sqrt{T}$ $d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1) = \sqrt{|(+\sqrt{T}) - (-\sqrt{T})|^2} = 2\sqrt{T}$

● Conj. 4: $\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} \sqrt{2T} \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2T} \end{bmatrix}$ $d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1) = \sqrt{|(\sqrt{2T}) - (0)|^2 + |(0) - (\sqrt{2T})|^2} = 2\sqrt{T}$

Energía media por símbolo - Constelación

$$\begin{aligned} E_s &= E[\mathcal{E}\{s(t)\}] = \sum_{i=0}^{M-1} p_A(\mathbf{a}_i) \mathcal{E}\{\mathbf{a}_i\} \\ &= \sum_{i=0}^{M-1} p_A(\mathbf{a}_i) \sum_{j=0}^{N-1} |a_{i,j}|^2 \end{aligned}$$

- Conjunto 1 (símbolos equiprobables)

$$E_s = \frac{1}{2} \left(+\sqrt{T}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(-\sqrt{T}\right)^2 = \frac{1}{2} T + \frac{1}{2} T = T$$

- Conjunto 2 (símbolos equiprobables)

$$E_s = \frac{1}{2} \left(+2\sqrt{T}\right)^2 + \frac{1}{2} (0)^2 = \frac{1}{2} 4T + \frac{1}{2} 0 = 2T$$

Energía media por símbolo - Constelación (II)

- Conjunto 3 (símbolos equiprobables)

$$E_s = \frac{1}{2} \left(+\sqrt{T}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(-\sqrt{T}\right)^2 = \frac{1}{2} T + \frac{1}{2} T = T$$

- Conjunto 4 (símbolos equiprobables)

$$E_s = \frac{1}{2} \left[\left(\sqrt{2T}\right)^2 + (0)^2 \right] + \frac{1}{2} \left[(0)^2 + \left(\sqrt{2T}\right)^2 \right] = \frac{1}{2} 2T + \frac{1}{2} 2T = 2T$$

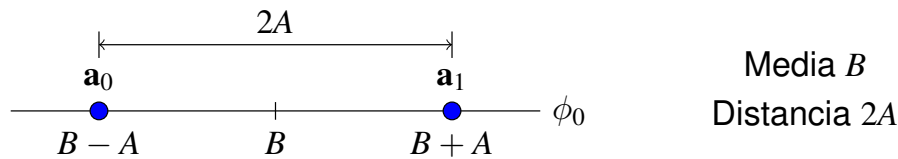
- Mínima energía para unas distancias entre símbolos dadas

- ▶ Conjunto 1 y Conjunto 3 requieren menos energía para la misma distancia
 - ★ Para unas distancias entre símbolos dadas, se minimiza la energía si la media de la constelación es nula

$$E[\mathbf{a}_i] = \begin{bmatrix} E[a_{i,0}] \\ E[a_{i,1}] \\ \vdots \\ E[a_{i,N-1}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Mínima E_s para unas distancias entre símbolos - Media nula

- Ejemplo en espacio 1D: símbolos $\mathbf{a}_0 = B - A, \mathbf{a}_1 = B + A$



- Energía media por símbolo (símbolos equiprobables)

$$E_s = \frac{1}{2} \mathcal{E}\{\mathbf{a}_0\} + \frac{1}{2} \mathcal{E}\{\mathbf{a}_1\} = \frac{1}{2} (B - A)^2 + \frac{1}{2} (B + A)^2$$

$$= \frac{1}{2} (B^2 + A^2 - 2AB) + \frac{1}{2} (B^2 + A^2 + 2AB) = B^2 + A^2$$

- ▶ Contribución media: B^2
- ▶ Contribución distancia: A^2

- Mínima energía por símbolo para una distancia $2A$

$$\text{Media nula } (B = 0) \rightarrow E_s = A^2$$

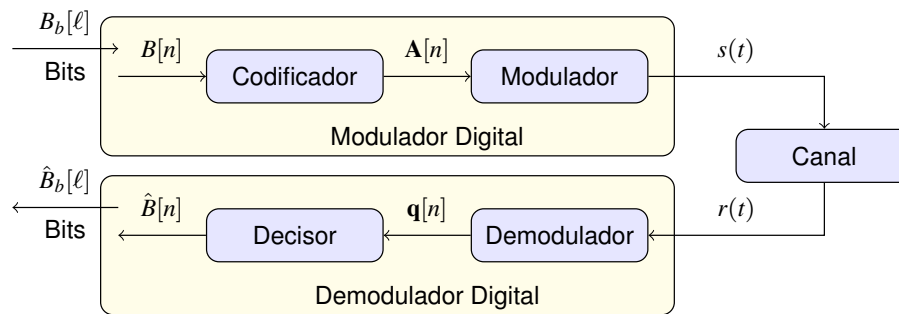
Diseño del modulador digital - Selección de las M señales

- Restricciones a tener en cuenta
 - ▶ Energía de las señales E_s
 - ▶ Distancia (medida de parecido/diferencia) entre señales: $d(s_i(t), s_j(t))$
 - ▶ Adecuación a las características del canal: $s_i(t) * h(t) = s_i(t)$
- Representación discreta (vectorial) de las señales
 - ▶ Constelación de M puntos
 - ★ M vectores $\mathbf{a}_i$ de dimensión N (representan a las M señales)
 - ★ Permite evaluar energías y distancias (independientemente de la base)
 - ▶ Base ortonormal de dimensión N
 - ★ N funciones ortonormales, $\phi_j(t)$
 - ★ Permite evaluar la adecuación a las características del canal (independientemente de la constelación)

$$\text{Si } \phi_j(t) * h(t) = \phi_j(t), \forall j, \text{ entonces } s_i(t) * h(t) = s_i(t), \forall i$$

- ▶ Constelación vs base: restricción común del diseño
 - ★ N : Dimensión del espacio de señales

Modelo de comunicación digital



- División del modulador digital en dos módulos
 - ▶ Codificador + Modulador
- División del demodulador digital en dos módulos
 - ▶ Demodulador + Decisor
- Representaciones intermedias vectoriales: $\mathbf{A}[n]$ y $\mathbf{q}[n]$
 - ▶ Representación de las señales en un espacio vectorial de dimensión N
 - ▶ Simplifican notablemente el diseño del transmisor y receptor

Descripción de cada módulo - Transmisor

- Codificador
 - ▶ Define la **constelación** : $\{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{M-1}\}$ M vectores
 - ★ Representación vectorial de la señal asociada a cada símbolo
 - ★ Intervalo de índice n : vector $\mathbf{A}[n]$ representando $s(t)$ en $nT \leq t < (n+1)T$
 - ▶ Criterio de diseño (para seleccionar la constelación)
 - ★ Energía
 - ★ Distancia ("diferencia") entre señales (prestaciones)
- Modulador
 - ▶ Define la **base ortonormal** del espacio de señales:

$\{\phi_0(t), \phi_1(t), \dots, \phi_{N-1}(t)\}$ N señales
 - ▶ Criterio de diseño (seleccionar las N funciones $\phi_k(t)$)
 - ★ Adaptación a las características del canal

$$\phi_k(t) * h(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \Phi_k(j\omega) H(j\omega) = \Phi_k(j\omega)$$

Descripción de cada módulo - Receptor

- Demodulador

- ▶ Convierte la señal recibida, por intervalos de símbolo, en vectores en el espacio de señales definida por la base $\{\phi_k(t)\}_{k=0}^{N-1}$

★ Intervalo de índice n : vector $\mathbf{q}[n]$ representando $r(t)$ en $nT \leq t < (n+1)T$

- Decisor

- ▶ Compara el “parecido” entre la señal recibida y las M posibles señales $\{s_0(t), s_1(t), \dots, s_{M-1}(t)\}$ para decidir símbolos

★ Medida de la distancia en la representación vectorial

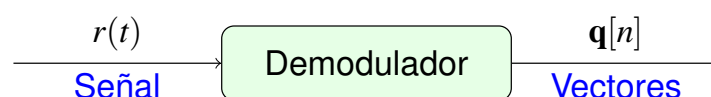
★ Compara las distancias entre:

- Vector de la señal recibida en el intervalo de símbolo: $\mathbf{q}[n]$

- Vectores de los M posibles símbolos: $\mathbf{a}_i$, for $i \in \{0, 1, \dots, M-1\}$

$$d(\mathbf{q}[n], \mathbf{a}_0), d(\mathbf{q}[n], \mathbf{a}_1), d(\mathbf{q}[n], \mathbf{a}_2), \dots, d(\mathbf{q}[n], \mathbf{a}_{M-1})$$

Demodulador



- Obtiene la representación en tiempo discreto de la señal recibida $r(t)$

- ▶ Proyección en el espacio de señales N -D del modulador

$$\mathbf{q}[n] = \begin{bmatrix} q_0[n] \\ q_1[n] \\ \vdots \\ q_{N-1}[n] \end{bmatrix} \equiv r(t) \text{ en base ortonormal } \{\phi_0(t), \phi_1(t), \dots, \phi_{N-1}(t)\}$$

- Proceso de la señal a tramos: por intervalos de símbolo

- ▶ Vector $\mathbf{q}[n]$: representación discreta de $r(t)$ en $nT \leq t < (n+1)T$

Demodulador por correlación

- $q[n]$: producto escalar con $\{\phi_0(t - nT), \phi_1(t - nT), \dots, \phi_{N-1}(t - nT)\}$
 - ▶ Soporte de $\phi_k(t)$:

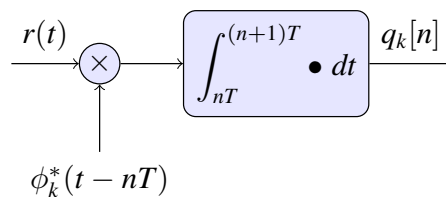
$$0 \leq t < T$$

- ▶ Soporte de $\phi_k(t - nT)$:

$$nT \leq t < (n+1)T$$

$$q_k[n] = \langle r(t), \phi_k(t - nT) \rangle = \int_{nT}^{(n+1)T} r(t) \phi_k^*(t - nT) dt$$

- Correlación: Implementación directa del producto escalar



Demodulator usando filtros adaptados

$$q_k[n] = \langle r(t), \phi_k(t - nT) \rangle = \int_{nT}^{(n+1)T} r(t) \phi_k^*(t - nT) dt = \int_{nT}^{(n+1)T} r(\tau) \phi_k^*(\tau - nT) d\tau$$

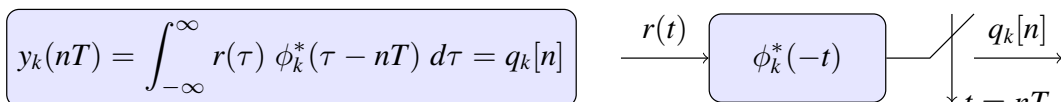
- Filtrado de la señal con un filtro con respuesta al impulso $h_k(t)$

$$y_k(t) = r(t) * h_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) h_k(t - \tau) d\tau$$

- ▶ Respuesta del filtro adaptado $h_k(t) = \phi_k^*(-t)$

$$y_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) \phi_k^*(-(t - \tau)) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) \phi_k^*(\tau - t) d\tau$$

- ▶ Valor de la señal $y_k(t)$ en el instante $t = nT$



Demodulador con filtros adaptados causales

- Soporte de la respuesta al impulso: elementos de la base

- ▶ Funciones $\phi_k(t)$: definidas en $0 \leq t < T$
- ▶ Soporte de los filtros adaptados $h_k(t) = \phi_k^*(-t)$
 - ★ Funciones $\phi_k^*(-t)$: definidas en $-T < t \leq 0$
 - ★ NO causales (anticausales)
 - ★ Implementation real NO es posible

- Implementación real de los filtros adaptados

- ▶ Conversión a respuesta causal: retardo de T segundos

$$h_k^T(t) = h_k(t - T) = \phi_k^*(-(t - T)) = \phi_k^*(T - t)$$

- ▶ Producto escalar (para obtener la coordenada $q_k[n]$)

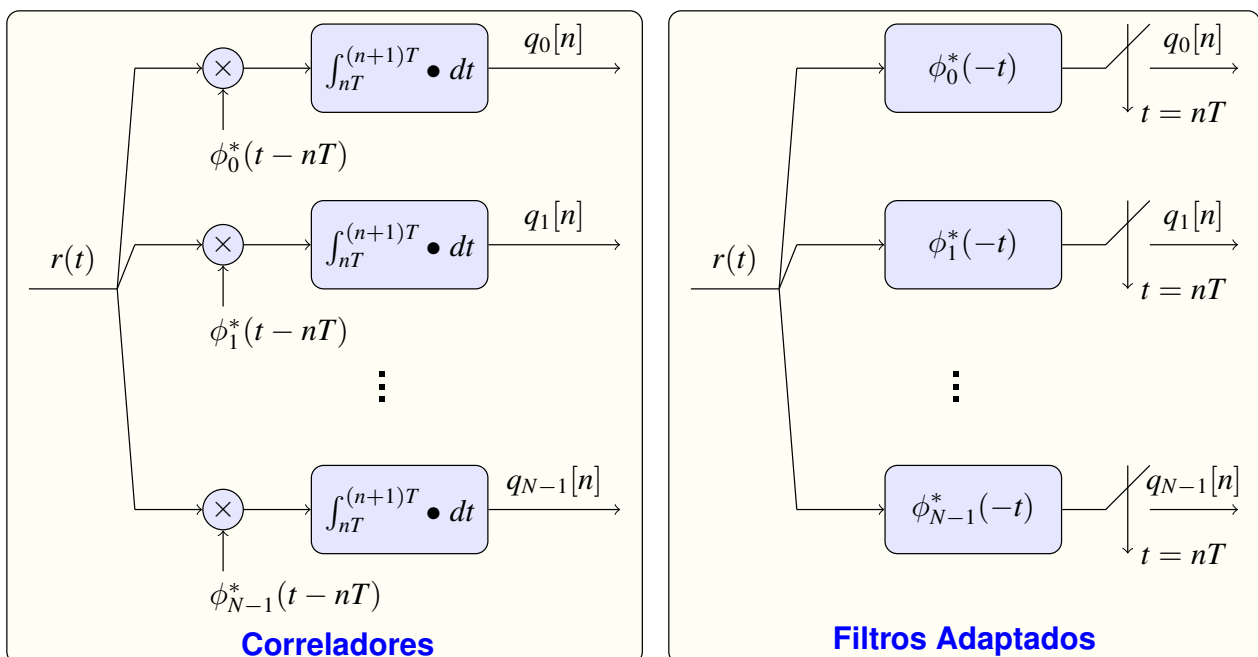
- ★ El filtro causal $h_k^T(t)$ retarda la señal de salida T segundos

$$y_k^T(t) = r(t) * h_k^T(t) = y_k(t - T)$$

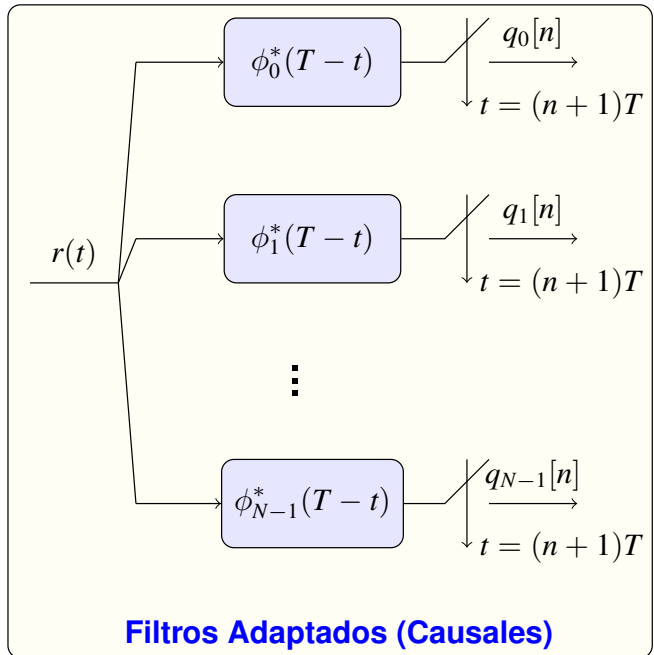
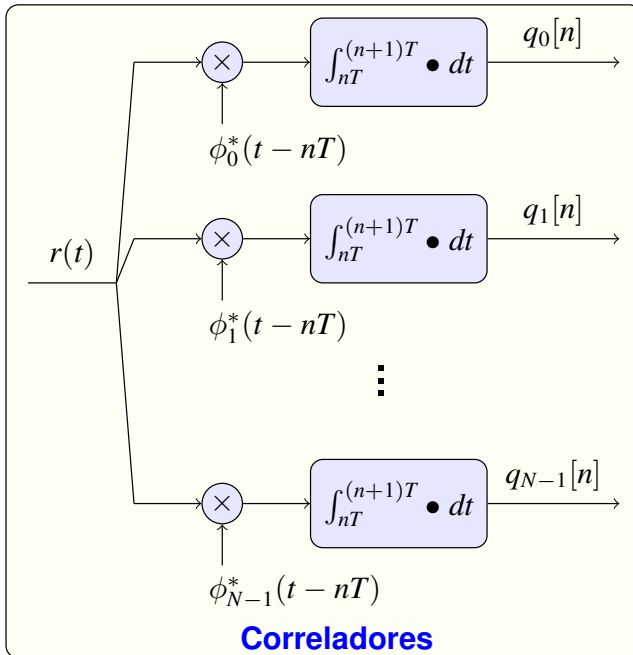
- ★ El instante de muestreo se debe retardar T segundos

$$q_k[n] = \langle r(t), \phi_k(t - nT) \rangle = y_k(nT) = y_k^T((n + 1)T)$$

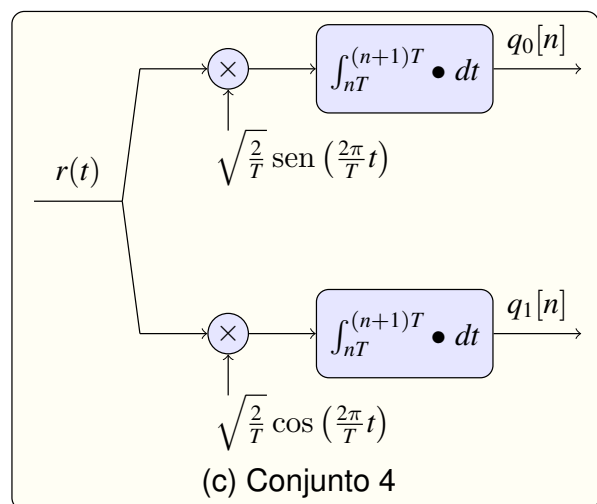
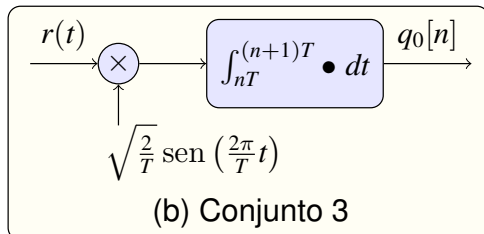
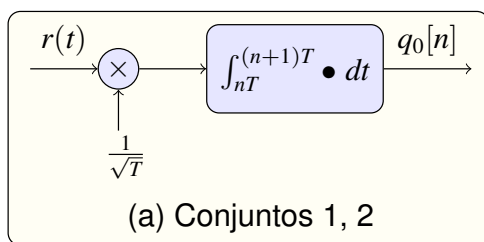
Implementación de un demodulador N -dimensional



Implementación de un demodulador N -dimensional



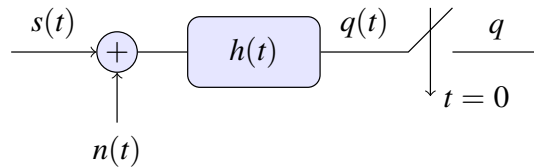
Ejemplos de implementación (Correladores)



NOTA: $\text{sen}\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = \text{sen}\left(\frac{2\pi}{T}(t - nT)\right)$

Propiedad del filtro adaptado - Máxima relación S/N

- Filtrado de una señal $s(t)$ más ruido $n(t)$ con un filtro $h(t)$



- ▶ S : Energía en q debida a la señal $s(t)$
 - ★ $s(t)$ es una señal real determinista
- ▶ N : Energía en q debida al ruido $n(t)$
 - ★ Modelo $n(t)$: proceso aleatorio estacionario, blanco y gaussiano, con estadísticos

$$S_n(j\omega) = \frac{N_0}{2}, R_n(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$$

- ▶ Cálculo de la relación señal a ruido (S/N)

$$\frac{S}{N} \equiv \frac{\text{Energía en } q \text{ debida a } s(t)}{\text{Energía en } q \text{ debida a } n(t)}$$

- ★ Búsqueda del filtro real $h(t)$ que maximiza la relación S/N

Propiedad del filtro adaptado - Máxima relación S/N (II)

- Salida del filtro

$$\begin{aligned} q(t) &= (s(t) + n(t)) * h(t) = s(t) * h(t) + n(t) * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) h(t - \tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} n(\tau) h(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

- Valor en el instante $t = 0$

$$q = q(0) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) h(-\tau) d\tau}_{\text{término de señal} \equiv s} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} n(\tau) h(-\tau) d\tau}_{\text{término de ruido} \equiv z} = s + z$$

- Relación señal a ruido en q

$$\left(\frac{S}{N} \right)_q = \frac{E[|s|^2]}{E[|z|^2]}$$

- ▶ Cálculo de $E[|s|^2]$

- ★ Procesado de $s(t)$, señal determinista

$$E[|s|^2] = |s|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) h(-\tau) d\tau \right|^2 \text{ (valor determinista)}$$

- ▶ Cálculo de $E[|z|^2]$

- ★ Procesado de $n(t)$, señal aleatoria

Cálculo del valor esperado de $|z|^2$ teniendo en cuenta los estadísticos de la señal de ruido $n(t)$

Propiedad del filtro adaptado - Máxima relación S/N (III)

- Estadísticos de $n(t)$

$$\text{Densidad espectral de potencia } S_n(j\omega) = \frac{N_0}{2}; \text{ Autocorrelación } R_n(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$$

- Cálculo de $E[|z|^2]$

$$\begin{aligned} E[|z|^2] &= E\left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty} n(\tau) h(-\tau) d\tau\right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} n(\theta) h(-\theta) d\theta\right)\right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{E[n(\tau) n(\theta)]}_{R_n(\tau-\theta)} h(-\tau) h(-\theta) d\tau d\theta \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{N_0}{2} \delta(\tau-\theta)}_{R_n(\tau-\theta)} h(-\tau) h(-\theta) d\tau d\theta \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |h(-\tau)|^2 d\tau = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|^2 d\tau = \frac{N_0}{2} \mathcal{E}\{h(t)\} \end{aligned}$$

NOTA: se ha aplicado la propiedad de la integral de una delta multiplicando a una función

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$$

Propiedad del filtro adaptado - Máxima relación S/N (IV)

- Relación señal a ruido

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q = \frac{|s|^2}{E[z^2]} = \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) h(-\tau) d\tau\right|^2}{\frac{N_0}{2} \mathcal{E}\{h(t)\}}$$

- Desig. Cauchy-Schwarz ($s(t), h(t) \in \mathbf{R}$)

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) h(-\tau) d\tau\right|^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |s(\tau)|^2 d\tau\right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |h(-\tau)|^2 d\tau\right)$$

► La igualdad (valor máximo) se obtiene para $h(-t) = \alpha \times s(t)$, $\alpha \in \mathbf{R}$

- Relación señal a ruido máxima:

$$\begin{aligned} \max_{h(t)} \left(\frac{S}{N}\right)_q &= \frac{\left(\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) h(-\tau) d\tau\right)^2}{\frac{N_0}{2} \mathcal{E}\{h(t)\}} \bigg|_{h(-t)=\alpha s(t)} \\ &= \frac{\left(\int_{-\infty}^{\infty} |s(\tau)|^2 d\tau\right) \left(\alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} |s(\tau)|^2 d\tau\right)}{\frac{N_0}{2} \alpha^2 \mathcal{E}\{s(t)\}} = \frac{\mathcal{E}\{s(t)\}}{\frac{N_0}{2}} \end{aligned}$$

Propiedad del filtro adaptado - Máxima relación S/N (IV)

De este resultado se obtienen dos conclusiones:

- 1 Para señales reales, la relación señal a ruido a la salida se hace máxima cuando $h(t) = \alpha s(-t)$ para cualquier valor de α (exceptuando $\alpha = 0$) y, particularmente, para el filtro adaptado

$$h(t) = s(-t)$$

Para señales complejas se llega a la misma conclusión pero con el filtro adaptado complejo

$$h(t) = s^*(-t)$$

- 2 La relación señal a ruido a la salida del filtro adaptado no depende de la forma específica de $s(t)$

- ▶ S/N depende de $\mathcal{E}\{s(t)\}$
- ▶ S/N depende de N_0

Demodulador - Modelo estadístico de $\mathbf{q}[n]$ para $\mathbf{A}[n] = \mathbf{a}_i$

- Modelo de la salida del demodulador $\mathbf{q}$ asumiendo:

- ▶ Elección óptima del modulador para el canal

- ★ Base ortonormal:

$$\text{Base ortonormal : } \langle \phi_j(t), \phi_k(t) \rangle = \int_0^T \phi_j(t) \phi_k^*(t) dt = \begin{cases} 0, & \text{si } k \neq j \\ 1, & \text{si } k = j \end{cases} \equiv \delta[j - k]$$

- ★ Adecuación al canal $\rightarrow$ canal gaussiano:

$$\phi_j(t) * h(t) = \phi_j(t) \rightarrow \mathbf{r}(t) = \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t)$$

- ▶ Símbolo transmitido es

$$\mathbf{A}[n] = \mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} a_{i,0} \\ a_{i,1} \\ \vdots \\ a_{i,N-1} \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{s}(t)_{nT \leq t < (n+1)T} = \sum_{j=0}^{N-1} a_{i,j} \phi_j(t - nT)$$

- ★ Para simplificar la notación, $n = 0$. Primer símbolo: intervalo $0 \leq t < T$

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}[0] = \mathbf{a}_i \rightarrow \mathbf{s}(t)_{0 \leq t < T} = \sum_{j=0}^{N-1} a_{i,j} \phi_j(t)$$

Demodulador - Modelo estadístico de $\mathbf{q}[n]$ para $\mathbf{A}[n] = \mathbf{a}_i$ (II)

- Coordenada de índice k de $\mathbf{q}[n]$ (para simplificar la notación, $n = 0$)

$$\begin{aligned}
 q_k &= \langle r(t), \phi_k(t) \rangle = \int_0^T r(t) \phi_k^*(t) dt = \int_0^T (s(t) + n(t)) \phi_k^*(t) dt \\
 &= \int_0^T \left(\sum_{j=0}^{N-1} a_{i,j} \phi_j(t) \right) \phi_k^*(t) dt + \underbrace{\int_0^T n(t) \phi_k^*(t) dt}_{z_k} \\
 &= \sum_{j=0}^{N-1} a_{i,j} \int_0^T \phi_j(t) \phi_k^*(t) dt + z_k = \sum_{j=0}^{N-1} a_{i,j} \delta[j-k] + z_k = a_{i,k} + z_k
 \end{aligned}$$

$$q_k = a_{i,k} + z_k$$

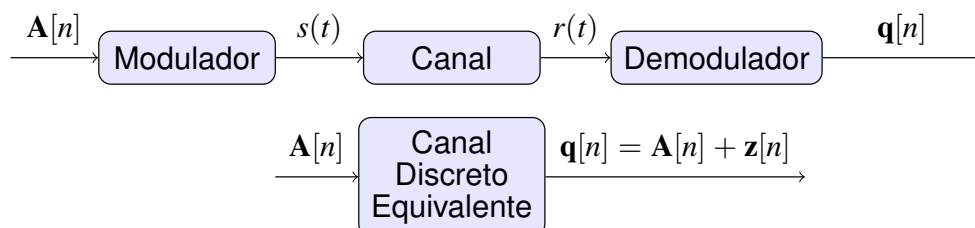
$$z_k = \int_0^T n(t) \phi_k^*(t) dt$$

Canal discreto equivalente

- Modelo completo de la observación $\mathbf{q}[n]$ dado que $\mathbf{A}[n] = \mathbf{a}_i$

$$\mathbf{q}[n] = \begin{bmatrix} a_{i,0} \\ a_{i,1} \\ \vdots \\ a_{i,N-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{N-1} \end{bmatrix} = \mathbf{a}_i + \mathbf{z}$$

- Canal discreto equivalente



Canal discreto equivalente - Modelo estadístico para z

- Modelo para $n(t)$ es un proceso aleatorio gaussiano
- Coordenadas $\{z_0, z_1, \dots, z_{N-1}\}$ son variables aleatorias conjuntamente gaussianas
 - ▶ Caracterización: Función densidad de probabilidad conjunta gaussiana
 - ▶ Parámetros
 - ★ Vector de medias
 - ★ Matriz de covarianzas
- Media de cada coordenada

$$E[z_k] = E \left[\int_0^T n(t) \phi_k^*(t) dt \right] = \int_0^T \underbrace{E[n(t)]}_{m_n(t)=0} \phi_k^*(t) dt = 0$$

Canal discreto equivalente - Modelo estadístico para z (II)

- Covarianza entre dos coordenadas

$$\begin{aligned} \text{Cov}(z_j, z_k) &= E[z_j z_k^*] = E \left[\left(\int_0^T n(t) \phi_j^*(t) dt \right) \left(\int_0^T n^*(\tau) \phi_k(\tau) d\tau \right) \right] \\ &= \int_0^T \int_0^T \underbrace{E[n(t) n^*(\tau)]}_{R_n(t-\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(t-\tau)} \phi_j^*(t) \phi_k(\tau) dt d\tau \\ &= \int_0^T \int_0^T \frac{N_0}{2} \delta(t-\tau) \phi_j^*(t) \phi_k(\tau) dt d\tau \\ &= \frac{N_0}{2} \int_0^T \phi_j^*(t) \phi_k(t) dt = \frac{N_0}{2} \delta[j-k] \end{aligned}$$

- ▶ Variables aleatorias z_j y z_k ($k \neq j$): **Incorreladas $\rightarrow$ Independientes**
 - ★ Son conjuntamente gaussianas con covarianza nula
- ▶ Varianza de cada componente de ruido z_k : $\sigma_{z_k}^2 = \frac{N_0}{2}$

Distribuciones marginales y conjuntas para $\mathbf{z}$

- Distribución marginal

$$f_{z_k}(z_k) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{z_k^2}{N_0}}$$

- ▶ Gausiana: media nula y varianza $\frac{N_0}{2}$

$$f_{z_k}(z_k) = \mathcal{N}\left(0, \frac{N_0}{2}\right)$$

- Distribución conjunta para $\mathbf{z} = [z_0, z_1, \dots, z_{N-1}]^T$

$$f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) = \prod_{k=0}^{N-1} f_{z_k}(z_k) = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} e^{-\sum_{k=0}^{N-1} \frac{z_k^2}{N_0}} = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} e^{-\frac{\|\mathbf{z}\|^2}{N_0}}$$

- ▶ Conjuntamente Gaussianas (N -dimensional) e independientes: media nula y varianzas $\frac{N_0}{2}$

$$f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) = \mathcal{N}^N\left(\mathbf{0}, \frac{N_0}{2}\right)$$

Distribuciones condicionales para $\mathbf{q}[n]$ dado $\mathbf{A}[n] = \mathbf{a}_i$

- Canal discreto equivalente $\mathbf{q}[n] = \mathbf{A}[n] + \mathbf{z}[n]$
- Distribución para cada coordenada dado $\mathbf{A}[n] = \mathbf{a}_i$

$$q_k = a_{i,k} + z_k, \text{ con } f_{z_k}(z_k) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{z_k^2}{N_0}} \equiv \mathcal{N}\left(0, \frac{N_0}{2}\right)$$

$$f_{q_k|\mathbf{A}}(q_k|\mathbf{a}_i) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(q_k - a_{i,k})^2}{N_0}} \equiv \mathcal{N}\left(a_{i,k}, \frac{N_0}{2}\right)$$

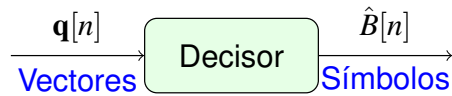
- ▶ Gausiana: media $a_{i,k}$ y varianza $\frac{N_0}{2}$

- Distribución de la observación conjunta $\mathbf{q}[n]$ dado $\mathbf{A}[n] = \mathbf{a}_i$

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_i) &= \prod_{k=0}^{N-1} f_{q_k|\mathbf{A}_k}(q_k|a_{i,k}) = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} e^{-\sum_{k=0}^{N-1} \frac{(q_k - a_{i,k})^2}{N_0}} \\ &= \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} e^{-\frac{\|\mathbf{q} - \mathbf{a}_i\|^2}{N_0}} \equiv \mathcal{N}^N\left(\mathbf{a}_i, \frac{N_0}{2}\right) \end{aligned}$$

- ▶ Gausiana (N -dimensional): media $\mathbf{a}_i$ y varianzas $\frac{N_0}{2}$

Decisor



- Estima la secuencia de símbolos transmitidos $B[n]$
 - ▶ Estima de esta secuencia símbolo a símbolo
 - ▶ En el instante discreto n :
 - ★ Se procesa la observación en n , i.e., $\mathbf{q}[n]$
 - ★ Se estima el símbolo transmitido en n , i.e., $\hat{B}[n]$
- Objetivo de diseño
 - ▶ Minimizar la probabilidad de error de símbolo P_e

Decisión para minimizar $P_e = P(\hat{B}[n] \neq B[n])$

Diseño del decisor - Regiones de decisión

- Alfabeto de M posibles valores

$$B[n] \in \{b_0, b_1, \dots, b_{M-1}\}$$

- Forma de establecer la decisión para una observación $\mathbf{q}[n]$
 - ▶ División del dominio de $\mathbf{q}[n]$ en M regiones disjuntas
 - ★ Cada región (I_k) se asocia a un símbolo (b_k)

$$\hat{B}[n] = b_k \text{ si } \mathbf{q}[n] \in I_k$$

- ★ Por eso se denominan **Regiones de Decisión**
- ★ NOTA: hay una asociación unívoca $B[n] = b_i \leftrightarrow \mathbf{A}[n] = \mathbf{a}_i$

$$\hat{B}[n] = b_k \leftrightarrow \hat{\mathbf{A}}[n] = \mathbf{a}_k$$

- Diseño de las regiones de decisión
 - ▶ División del dominio de $\mathbf{q}[n]$ para cumplir el criterio de diseño del decisor
 - ★ Minimización de la probabilidad de error de símbolo P_e

Diseño del decisor

- Para simplificar la notación: $\mathbf{q} \equiv \mathbf{q}[n] \rightarrow \hat{B} \equiv \hat{B}[n]$

- Probabilidad de error para un caso concreto

- ▶ Caso: $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 \rightarrow \hat{B} = b_i$

$$P_e(\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 \rightarrow \hat{B} = b_i) = P(B \neq b_i | \mathbf{q} = \mathbf{q}_0) = 1 - P(B = b_i | \mathbf{q} = \mathbf{q}_0) \\ = 1 - p_{B|\mathbf{q}}(b_i | \mathbf{q}_0)$$

- ▶ Probabilidad condicional $p_{B|\mathbf{q}}(b_i | \mathbf{q}_0)$: Probabilidad *a posteriori*

- Probabilidad de error para un decisor “tonto” (decisión constante)

- ▶ Decisión es siempre $\hat{B} = b_i$, para cualquier valor de $\mathbf{q}$

- ★ Promedio de la probabilidad de error al decidir $\hat{B} = b_i$ para todos los valores de $\mathbf{q}$

$$P_e(\hat{B} = b_i, \forall \mathbf{q}) = E_{f_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_0)} [P_e(\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 \rightarrow \hat{B} = b_i)] = \int_{-\infty}^{\infty} [1 - p_{B|\mathbf{q}}(b_i | \mathbf{q}_0)] f_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) d\mathbf{q}_0 \\ = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) d\mathbf{q}_0 - \int_{-\infty}^{\infty} p_{B|\mathbf{q}}(b_i | \mathbf{q}_0) f_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) d\mathbf{q}_0 \\ = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} p_{B|\mathbf{q}}(b_i | \mathbf{q}_0) f_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) d\mathbf{q}_0$$

Desarrollo del decisor (II)

- Extensión para una decisión general: Decidir $\hat{B} = b_i$ si $\mathbf{q} \in I_i$

$$P_e = 1 - \sum_{i=0}^{M-1} \int_{I_i} p_{B|\mathbf{q}}(b_i | \mathbf{q}_0) f_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) d\mathbf{q}_0$$

- Minimización de la probabilidad de error

- ▶ Se minimiza maximizando el segundo término
- ▶ $f_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_0)$ es independiente del símbolo transmitido o decidido
- ▶ Para cada valor de $\mathbf{q}_0$ se puede elegir $p_{B|\mathbf{q}}(b_i | \mathbf{q}_0)$
 - ★ Esto equivale a asociar $\mathbf{q}_0$ a la región de decisión I_k ($k \in \{0, 1, \dots, M-1\}$)

- Diseño de las regiones de decisión - CRITERIO MAXIMO A POSTERIORI

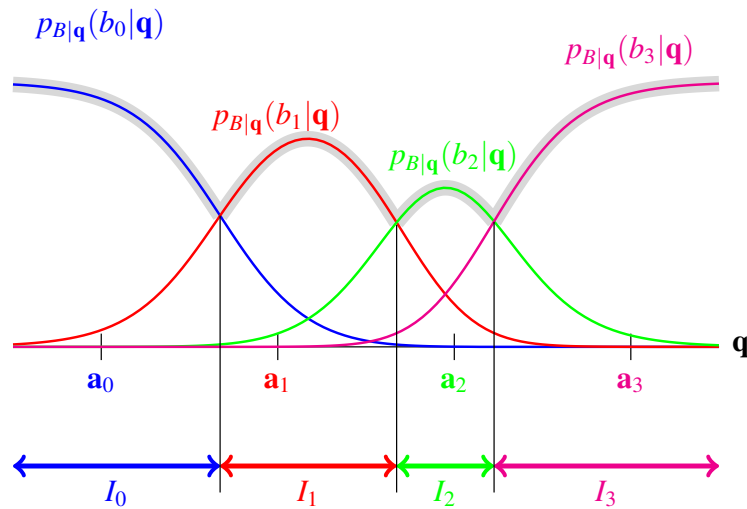
- ▶ Asignación de $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$ a la región I_i que maximiza $p_{B|\mathbf{q}}(b_i | \mathbf{q}_0)$

$$\mathbf{q}_0 \in I_i \text{ si } p_{B|\mathbf{q}}(b_i | \mathbf{q}_0) > p_{B|\mathbf{q}}(b_j | \mathbf{q}_0), \quad \forall j \neq i$$

- ▶ En el caso: $p_{B|\mathbf{q}}(b_i | \mathbf{q}_0) = p_{B|\mathbf{q}}(b_k | \mathbf{q}_0) > p_{B|\mathbf{q}}(b_j | \mathbf{q}_0), \forall j \neq \{i, k\}$

- ★ Asignación arbitraria de $\mathbf{q}_0$ a I_i o I_k

Regiones de decisión para P_e mínima - Un ejemplo



Criterio Maximo A Posteriori (MAP) - Desarrollo

- Probabilidades a posteriori $p_{B|q}(b_i|\mathbf{q}_0)$ - Regla de Bayes

$$p_{B|q}(b_j|\mathbf{q}_0) = \frac{p_B(b_j) f_{q|B}(\mathbf{q}_0|b_j)}{f_q(\mathbf{q}_0)}$$

- ▶ Teniendo en cuenta que $B = b_j$ implica que $\mathbf{A} = \mathbf{a}_j$ y viceversa

$$f_{q|B}(\mathbf{q}_0|b_j) \equiv f_{q|\mathbf{A}}(\mathbf{q}_0|\mathbf{a}_j)$$

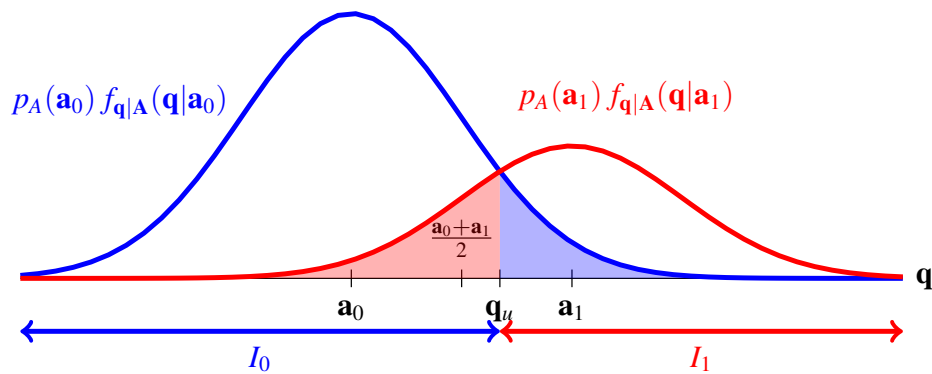
- Criterio MAXIMO A POSTERIORI (MAP): Se asigna $\mathbf{q}_0$ a I_i si

$$\frac{p_B(b_i) f_{q|\mathbf{A}}(\mathbf{q}_0|\mathbf{a}_i)}{f_q(\mathbf{q}_0)} > \frac{p_B(b_j) f_{q|\mathbf{A}}(\mathbf{q}_0|\mathbf{a}_j)}{f_q(\mathbf{q}_0)} \quad j = 0, \dots, M-1, j \neq i$$

Como $f_q(\mathbf{q}_0)$ es una cantidad no negativa

$$\mathbf{q}_0 \in I_i \text{ si } \begin{cases} p_B(b_i) f_{q|\mathbf{A}}(\mathbf{q}_0|\mathbf{a}_i) > p_B(b_j) f_{q|\mathbf{A}}(\mathbf{q}_0|\mathbf{a}_j) \\ p_{\mathbf{A}}(\mathbf{a}_i) f_{q|\mathbf{A}}(\mathbf{q}_0|\mathbf{a}_i) > p_{\mathbf{A}}(\mathbf{a}_j) f_{q|\mathbf{A}}(\mathbf{q}_0|\mathbf{a}_j) \end{cases} \quad \forall j \neq i$$

Criterio MAP: Ejemplo binario con $f_{q|A}(q_0|a_i)$ gaussiana

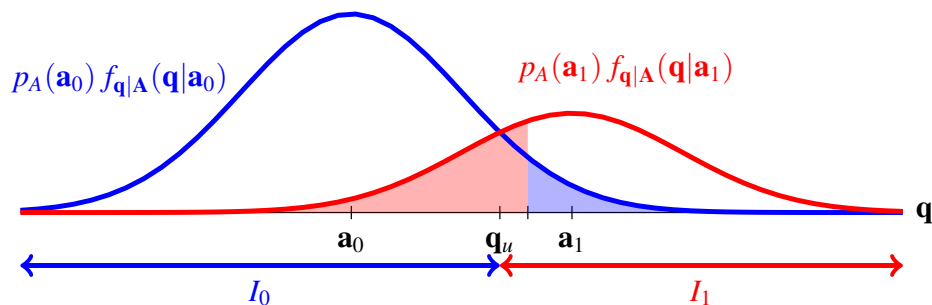
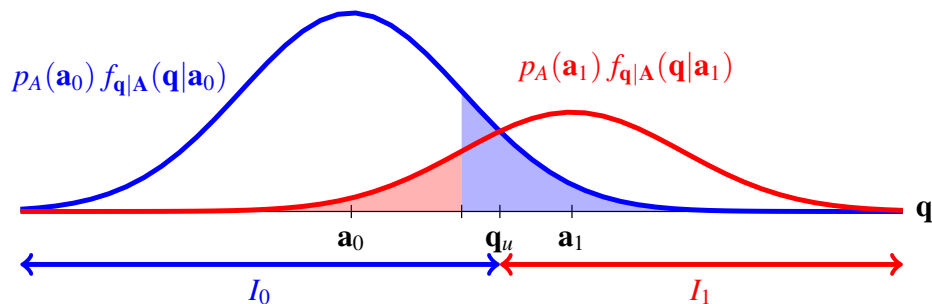


$$q_u = \frac{a_0 + a_1}{2} + \frac{N_0}{2} \frac{\ln \frac{p_A(a_0)}{p_A(a_1)}}{(a_1 - a_0)}, \quad I_0 = (-\infty, q_u), \quad I_1 = [q_u, \infty)$$

$$P_e = p_A(a_0) \int_{I_1} f_{q|A}(q|a_0) dq + p_A(a_1) \int_{I_0} f_{q|A}(q|a_1) dq$$

Criterio MAP: Ejemplo binario con $f_{q|A}(q_0|a_i)$ gaussiana (II)

- Cualquier otro umbral de decisión incrementa la probabilidad de error



Criterio de Máxima Verosimilitud

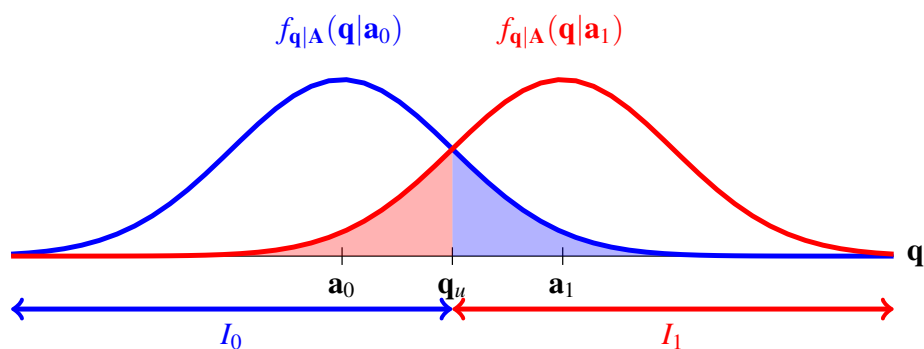
- Acrónimo ML (*Maximum Likelihood*)
- Se aplica cuando los símbolos son equiprobables

$$p_B(b_i) = p_A(a_i) = \frac{1}{M}, \forall i$$

- En ese caso, $\mathbf{q}_0$ se asigna a la región I_i si

$$f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q}_0|\mathbf{a}_i) > f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q}_0|\mathbf{a}_j) \quad \forall j \neq i$$

Criterio ML: Ejemplo binario con $f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q}_0|\mathbf{a}_i)$ gaussiana



$$\mathbf{q}_u = \frac{\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1}{2}, I_0 = (-\infty, \mathbf{q}_u), I_1 = [\mathbf{q}_u, \infty)$$

$$P_e = \frac{1}{2} \int_{I_1} f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_0) d\mathbf{q} + \frac{1}{2} \int_{I_0} f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_1) d\mathbf{q}$$

Criterio Mínima Distancia Euclídea: $f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_i)$ gaussiana y $p_B(b_i) = 1/M$

- Criterio ML: $\mathbf{q}_0$ pertenece a I_i si

$$\frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} e^{-\frac{\|\mathbf{q}_0 - \mathbf{a}_i\|^2}{N_0}} > \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} e^{-\frac{\|\mathbf{q}_0 - \mathbf{a}_j\|^2}{N_0}} \quad \forall j \neq i$$

- ▶ La exponencial es una función monótona creciente $e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$

$$\|\mathbf{q}_0 - \mathbf{a}_i\|^2 < \|\mathbf{q}_0 - \mathbf{a}_j\|^2 \quad \forall j \neq i$$

- ▶ Aplicando la definición de la norma de un vector

$$\|\mathbf{q}_0 - \mathbf{a}_i\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |q_{0,k} - a_{i,k}|^2 = |d(\mathbf{q}_0, \mathbf{a}_i)|^2$$

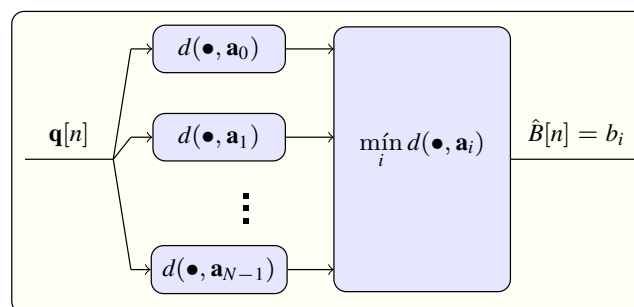
- ▶ Criterio de mínima distancia euclídea (MED: Minimum Euclidean Distance)

$$\mathbf{q} \in I_i \text{ si } d(\mathbf{q}_0, \mathbf{a}_i) < d(\mathbf{q}_0, \mathbf{a}_j), \quad \forall j \neq i$$

Decisor de Mínima Distancia

- Símbolos equiprobables
- Distribución $f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_i)$ gaussiana (ruido gaussiano)

NOTA: En realidad, también se cumplirá para cualquier distribución simétrica respecto del origen (función par) y decreciente en el caso 1-D, ya que en ese caso dos distribuciones con distinta media “se cortarán” en el punto medio entre ambas medias, o para funciones de base radial decrecientes en el caso N -D



Cálculo de la probabilidad de error

- Cuando se transmite el símbolo $B = b_i$ (o $\mathbf{A} = \mathbf{a}_i$)

- ▶ Distribución de la observación $f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_i)$
- ▶ Probabilidad de error condicional $P_{e|B=b_i} = P_{e|\mathbf{A}=\mathbf{a}_i} \equiv P_{e|\mathbf{a}_i}$

- ★ Se produce un error si $\hat{B} = b_j \neq b_i$
- ★ Esto ocurre cuando $\mathbf{q} \notin I_i$

$$P_{e|\mathbf{a}_i} = \int_{\mathbf{q} \notin I_i} f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_i) d\mathbf{q}$$

- Probabilidad de error total

- ▶ Se promedian las probabilidades de error condicionales

$$P_e = \sum_{i=0}^{M-1} p_{\mathbf{A}}(\mathbf{a}_i) P_{e|\mathbf{a}_i}$$

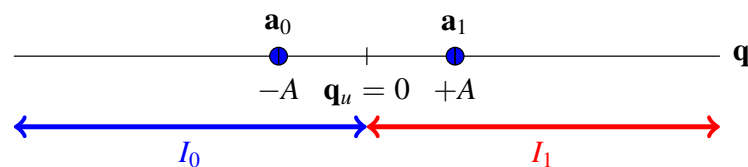
- ★ Para símbolos equiprobables

$$p_{\mathbf{A}}(\mathbf{a}_i) = \frac{1}{M} \rightarrow P_e = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} P_{e|\mathbf{a}_i}$$

Ejemplo

- Caso unidimensional ($N = 1$) y binario ($M = 2$)

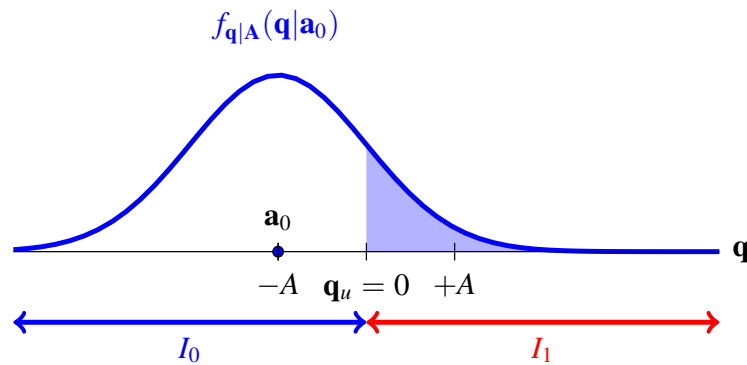
- ▶ Constelación $\mathbf{a}_0 = -A, \mathbf{a}_1 = +A$
- ▶ Símbolos equiprobables $p_{\mathbf{A}}(\mathbf{a}_0) = p_{\mathbf{A}}(\mathbf{a}_1) = \frac{1}{2}$
- ▶ Regiones de decisión Umbral $q_u = 0 \rightarrow I_0 = (-\infty, 0), I_1 = [0, \infty)$



- Probabilidad de error

$$\begin{aligned} P_e &= p_{\mathbf{A}}(\mathbf{a}_0) P_{e|\mathbf{a}_0} + p_{\mathbf{A}}(\mathbf{a}_1) P_{e|\mathbf{a}_1} \\ &= \frac{1}{2} P_{e|\mathbf{a}_0} + \frac{1}{2} P_{e|\mathbf{a}_1} \end{aligned}$$

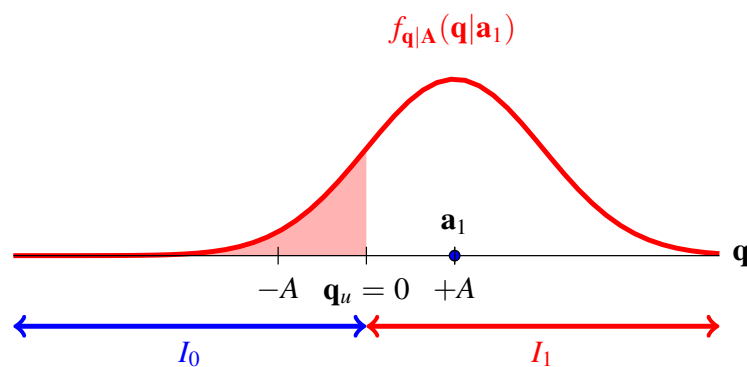
Probabilidad de error $B = b_0$



- Distribución $f_{q|A}(q|a_0)$ gaussiana de media $-A$ y varianza $N_0/2$

$$P_{e|a_0} = \int_{q \notin I_0} f_{q|A}(q|a_0) dq = Q\left(\frac{A}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Probabilidad de error $B = b_1$

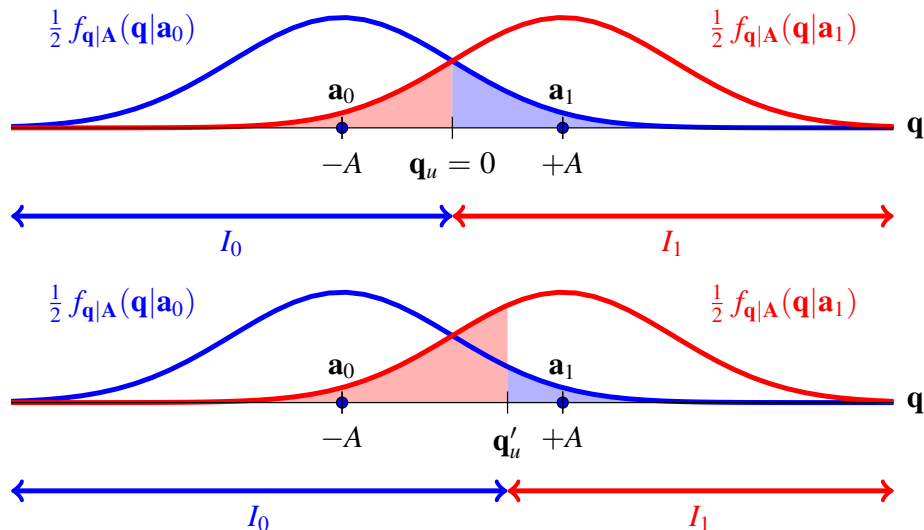


- Distribución $f_{q|A}(q|a_1)$ gaussiana de media $+A$ y varianza $N_0/2$

$$P_{e|a_1} = \int_{q \notin I_1} f_{q|A}(q|a_1) dq = Q\left(\frac{A}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Probabilidad de error total - Interpretación gráfica

$$P_e = \frac{1}{2}P_{e|a_0} + \frac{1}{2}P_{e|a_1} = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{q} \notin I_0} f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q}|a_0) d\mathbf{q} + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{q} \notin I_1} f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q}|a_1) d\mathbf{q}$$



Resultado general caso 1-D binario equiprobable

- En este caso, se tienen las siguientes condiciones
 - ▶ Regiones de decisión
 - ★ Umbral en el punto medio de los dos símbolos

$$\mathbf{q}_u = \frac{\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1}{2}$$

- ★ Distancia de cada símbolo al umbral

$$d(\mathbf{a}_0, \mathbf{q}_u) = d(\mathbf{a}_1, \mathbf{q}_u) = \frac{d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1)}{2}$$

- Probabilidad de error

$$P_e = Q\left(\frac{d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1)}{2\sqrt{N_0/2}}\right)$$

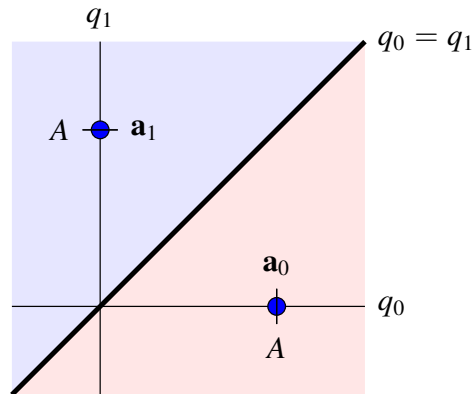
Ejemplo binario 2D

- Símbolos equiprobables $p_A(\mathbf{a}_0) = p_A(\mathbf{a}_1) = \frac{1}{2}$

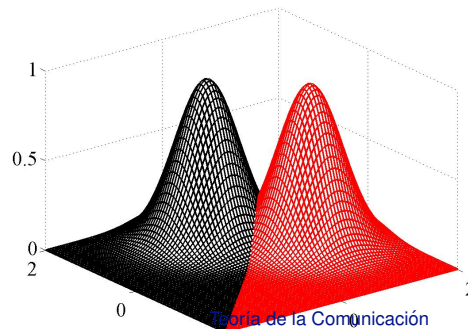
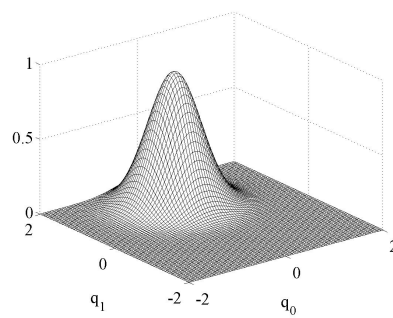
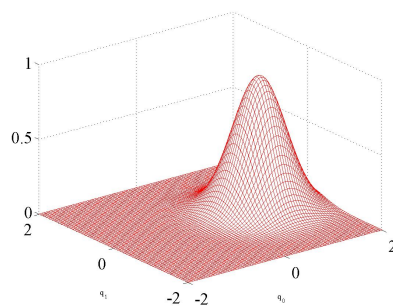
- Constelación $\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix}$

- Regiones de decisión: frontera $q_0 = q_1$

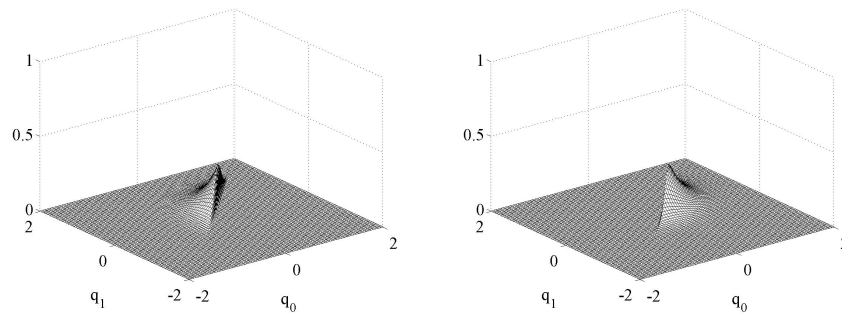
$$I_0 = \left\{ \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \end{bmatrix} : q_0 \geq q_1 \right\} \quad I_1 = \left\{ \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \end{bmatrix} : q_0 < q_1 \right\}$$



Distribuciones $f_{\mathbf{q}|A}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_0), f_{\mathbf{q}|A}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_1)$ ($A = 1$)



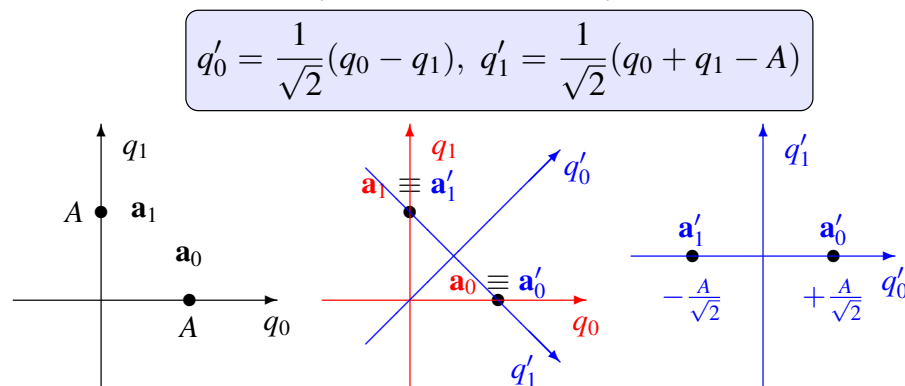
Cálculo de las probabilidades de error



- Hay que integrar las distribuciones condicionales para $\mathbf{a}_0$ y para $\mathbf{a}_1$ fuera de sus regiones de decisión
- Integrales de gaussianas en 2D en un semiplano
 - ▶ No existen expresiones analíticas ni tablas numéricas

Cambio de sistema de coordenadas

- Se puede realizar un cambio de coordenadas
 - ▶ Uno de los ejes pasa por los dos puntos de la constelación
 - ▶ Se gira la constelación 45° (sin cambiar escala)



- ▶ El valor de la segunda coordenada es nulo para ambos símbolos

Cambio de sistema de coordenadas

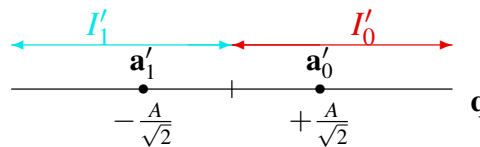
- Se puede realizar un cambio de coordenadas
 - Uno de los ejes pasa por los dos puntos de la constelación
 - Se gira la constelación 45° (sin cambiar escala)

$$q'_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_0 - q_1), \quad q'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_0 + q_1 - A)$$

- Nueva constelación (se mantiene la distancia)

$$\mathbf{a}'_0 = \begin{bmatrix} +\frac{A}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}'_1 = \begin{bmatrix} -\frac{A}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Se puede eliminar la segunda coordenada : Espacio 1D!!!



Desarrollo formal del cambio de coordenadas

- Transformación: $q'_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_0 - q_1), \quad q'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_0 + q_1 - A)$

- Si $A[n] = \mathbf{a}_0$, entonces $q_0 = a_{0,0} + z_0 = A + z_0$ $q_1 = a_{0,1} + z_1 = 0 + z_1$

$$q'_0|_{\mathbf{A}=\mathbf{a}_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}((a_{0,0} + z_0) - (a_{0,1} + z_1)) = \frac{1}{\sqrt{2}}((A + z_0) - (0 + z_1)) = \underbrace{\frac{A}{\sqrt{2}}}_{a'_{0,0}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(z_0 - z_1)}_{z'_0}$$

$$q'_1|_{\mathbf{A}=\mathbf{a}_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}((a_{0,0} + z_0) + (a_{0,1} + z_1) - A) = \frac{1}{\sqrt{2}}((A + z_0) + (0 + z_1) - A) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(z_0 + z_1)}_{z'_1}$$

- Si $A[n] = \mathbf{a}_1$ entonces $q_0 = a_{1,0} + z_0 = 0 + z_0$ $q_1 = a_{1,1} + z_1 = A + z_1$

$$q'_0|_{\mathbf{A}=\mathbf{a}_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}((a_{1,0} + z_0) - (a_{1,1} + z_1)) = \frac{1}{\sqrt{2}}((0 + z_0) - (A + z_1)) = \underbrace{-\frac{A}{\sqrt{2}}}_{a'_{1,0}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(z_0 - z_1)}_{z'_0}$$

$$q'_1|_{\mathbf{A}=\mathbf{a}_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}((a_{1,0} + z_0) + (a_{1,1} + z_1) - A) = \frac{1}{\sqrt{2}}((0 + z_0) + (A + z_1) - A) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(z_0 + z_1)}_{z'_1}$$

Desarrollo formal del cambio de coordenadas (II)

- Coordenadas de la nueva constelación

$$\mathbf{a}'_0 = \begin{bmatrix} +\frac{A}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}'_1 = \begin{bmatrix} -\frac{A}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

- ▶ No hay término de señal en la segunda coordenada

- Términos de ruido

$$z'_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_0 - z_1) \quad z'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_0 + z_1)$$

- ▶ Términos z'_0 y z'_1 proporcionales a $z_0 - z_1$ y a $z_0 + z_1$, respectivamente
- ▶ Son independientes (gaussianos e incorrelados)

$$\text{Cov}(z_0 - z_1, z_0 + z_1) = E[(z_0 - z_1)(z_0 + z_1)] = E[z_0^2 - z_1^2] = \frac{N_0}{2} - \frac{N_0}{2} = 0$$

- ★ Se puede descartar la segunda coordenada (no hay señal y el término de ruido z'_1 es independiente de z'_0)
- ▶ Estadísticos de z'_0

$$E[z'_0] = E\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(z_0 - z_1)\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}E[z_0] - \frac{1}{\sqrt{2}}E[z_1] = 0$$

$$\text{Var}(z'_0) = E\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(z_0 - z_1)\right)^2\right] = \frac{1}{2}E[z_0^2] + \frac{1}{2}E[z_1^2] - E[z_0 z_1] = \frac{1}{2}\frac{N_0}{2} + \frac{1}{2}\frac{N_0}{2} - 0 = \frac{N_0}{2}$$

Resultado general caso binario equiprobable

- Siempre es posible encontrar un cambio de coordenadas con uno de los ejes pasando por los dos puntos de la constelación
 - ▶ Lo relevante es la distancia entre los puntos
- En este caso, se tienen las siguientes condiciones
 - ▶ Regiones de decisión para símbolos equiprobables
 - ★ Umbral en el punto medio de los dos símbolos

$$\mathbf{q}_u = \frac{\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1}{2}$$

- ★ Distancia de cada símbolo al umbral

$$d(\mathbf{a}_0, \mathbf{q}_u) = d(\mathbf{a}_1, \mathbf{q}_u) = \frac{d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1)}{2}$$

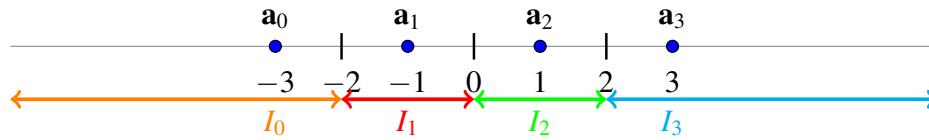
- Probabilidad de error

$$P_e = Q\left(\frac{d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1)}{2\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Espacio 1-D M -ario

- $M = 4$, símbolos equiprobables $p_A(\mathbf{a}_i) = \frac{1}{4}$
- Constelación: $\mathbf{a}_0 = -3, \mathbf{a}_1 = -1, \mathbf{a}_2 = +1, \mathbf{a}_3 = +3$
- Regiones de decisión: umbrales $q_{u1} = -2, q_{u2} = 0, q_{u3} = +2$

$$I_0 = (-\infty, -2], I_1 = (-2, 0], I_2 = (0, +2], I_3 = (+2, +\infty)$$



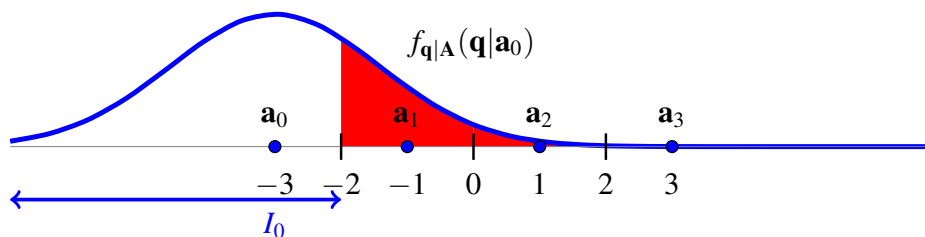
- Probabilidades de error condicionales

$$P_{e|\mathbf{a}_0} = Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right), P_{e|\mathbf{a}_1} = 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right), P_{e|\mathbf{a}_2} = P_{e|\mathbf{a}_1}, P_{e|\mathbf{a}_3} = P_{e|\mathbf{a}_0}$$

- Probabilidad de error total

$$P_e = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{M-1} P_{e|\mathbf{a}_i} = \frac{3}{2} Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

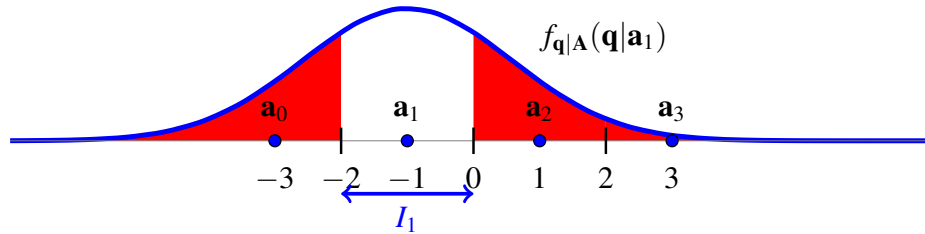
Cálculo $P_{e|\mathbf{a}_0}$



- Distribución $f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_0) = \mathcal{N}\left(\mathbf{a}_0, \frac{N_0}{2}\right)$
 - ▶ Gausiana: media $\mathbf{a}_0 = -3$ y varianza $N_0/2$
- Probabilidad de error
 - ▶ Integrar $f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_0)$ fuera de I_0

$$P_{e|\mathbf{a}_0} = \int_{\mathbf{q} \notin I_0} f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_0) d\mathbf{q} = Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

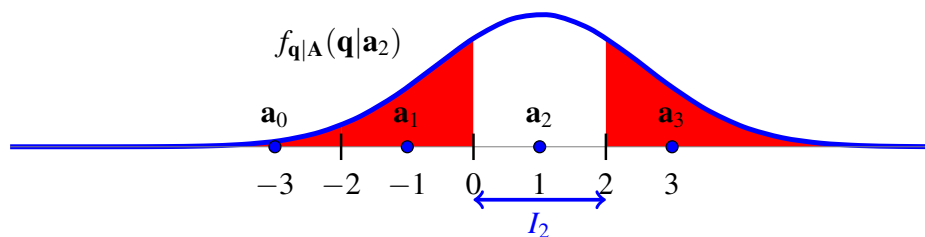
Cálculo $P_{e|a_1}$



- Distribución $f_{q|A}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_1) = \mathcal{N}\left(\mathbf{a}_1, \frac{N_0}{2}\right)$
 - Gausiana: media $\mathbf{a}_1 = -1$ y varianza $N_0/2$
- Probabilidad de error
 - Integrar $f_{q|A}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_1)$ fuera de I_1

$$P_{e|a_1} = \int_{\mathbf{q} \notin I_1} f_{q|A}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_1) d\mathbf{q} = 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

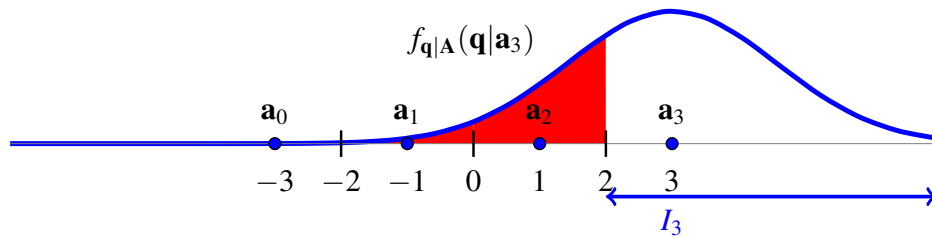
Cálculo $P_{e|a_2}$



- Distribución $f_{q|A}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_2) = \mathcal{N}\left(\mathbf{a}_2, \frac{N_0}{2}\right)$
 - Gausiana: media $\mathbf{a}_2 = +1$ y varianza $N_0/2$
- Probabilidad de error
 - Integrar $f_{q|A}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_2)$ fuera de I_2

$$P_{e|a_2} = \int_{\mathbf{q} \notin I_2} f_{q|A}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_2) d\mathbf{q} = 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Cálculo $P_{e|a_3}$

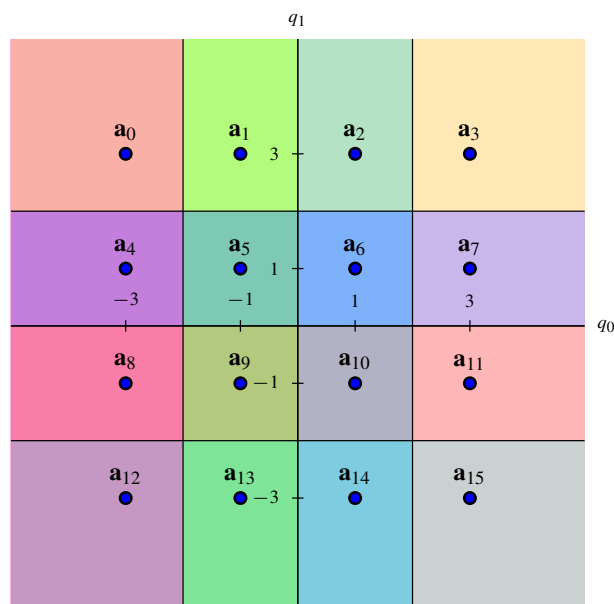


- Distribución $f_{q|A}(q|a_3) = \mathcal{N}\left(a_3, \frac{N_0}{2}\right)$
 - Gausiana: media $a_3 = -3$ y varianza $N_0/2$
- Probabilidad de error
 - Integrar $f_{q|A}(q|a_3)$ fuera de I_3

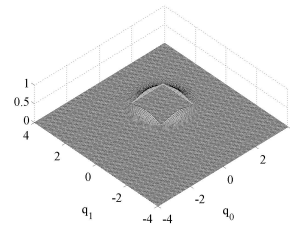
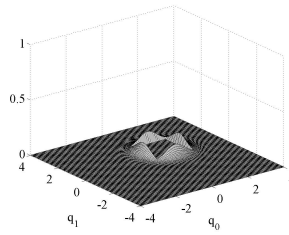
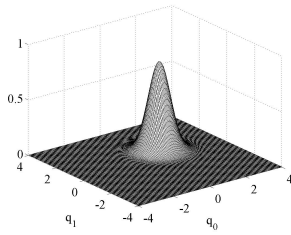
$$P_{e|a_3} = \int_{q \notin I_3} f_{q|A}(q|a_3) dq = Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Decisor M -ario en espacio multidimensional

- Ejemplo: constelación de 16 símbolos con regiones formando una retícula alineada con los ejes q_0 y q_1



Cálculo de la probabilidad de error para $\mathbf{a}_6$



- Coordenadas del símbolo: $\mathbf{a}_6 = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \end{bmatrix}$

- Distribución $f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_6)$: gaussiana 2D en $\mathbf{a}_6$ ($\sigma^2 = N_0/2$)

$$f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_6) = \mathcal{N}^2\left(\mathbf{a}_6, \frac{N_0}{2}\right) = \mathcal{N}^2\left(\begin{bmatrix} +1 \\ +1 \end{bmatrix}, \frac{N_0}{2}\right)$$

- Cálculo de la probabilidad de error condicional $P_{e|\mathbf{a}_6}$

- Región de decisión - Cuadrado $0 \leq q_0 < 2$ and $0 \leq q_1 < 2$

- ★ No hay expresiones analíticas para calcular directamente la integral de una gaussiana fuera de este cuadrado

Espacio 2D - Regiones de decisión forman una rejilla

- Las regiones de decisión se pueden describir mediante dos condiciones independientes sobre q_0 y sobre q_1 que han de cumplirse de forma simultánea

- Ejemplos

$$I_6 \equiv 0 \leq q_0 < 2 \text{ y } 0 \leq q_1 < 2$$

$$I_2 \equiv 0 \leq q_0 < 2 \text{ y } 2 \leq q_1 < \infty$$

- Se puede descomponer el problema 2D en 2 problemas 1D acoplados

$$P_{e|\mathbf{a}_i} = 1 - P_{a|\mathbf{a}_i} = 1 - P_{a|a_{i,0}} \times P_{a|a_{i,1}} = 1 - \left[(1 - P_{e|a_{i,0}}) (1 - P_{e|a_{i,1}}) \right]$$

- ★ La probabilidad de acierto $P_{a|\mathbf{a}_i}$ se puede escribir como el producto de la probabilidad de acertar en cada una de las dos direcciones del espacio $P_{a|a_{i,0}} \times P_{a|a_{i,1}}$
 - ★ La probabilidad de acierto en una de las direcciones del espacio ($P_{a|a_{i,0}}$ ó $P_{a|a_{i,1}}$) se puede escribir como 1 menos la probabilidad de error en esa dirección ($P_{e|a_{i,0}}$ ó $P_{e|a_{i,1}}$)

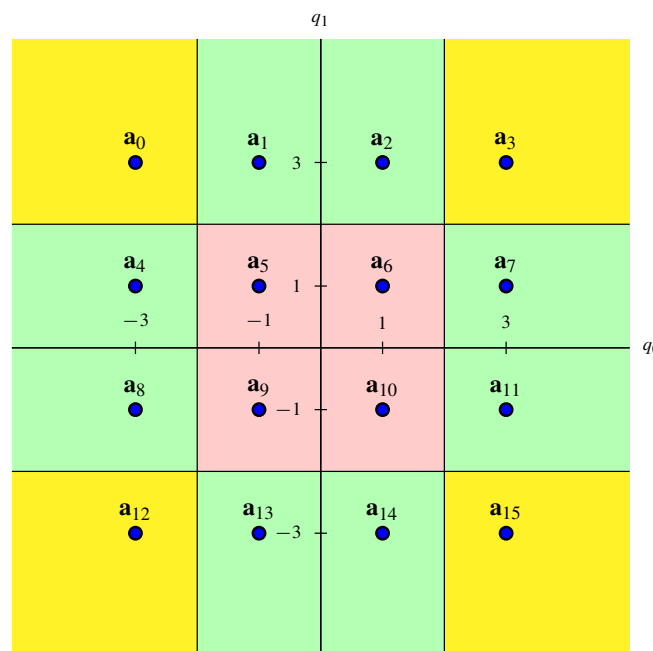
Tres tipos de regiones de decisión

- Tipo 1: $\{I_0, I_3, I_{12}, I_{15}\}$
 - ▶ Una única frontera de decisión en cada dirección del espacio
- Tipo 2: $\{I_5, I_6, I_9, I_{10}\}$
 - ▶ Dos fronteras de decisión en cada dirección del espacio
- Tipo 3: $\{I_1, I_2, I_4, I_7, I_8, I_{11}, I_{13}, I_{14}\}$
 - ▶ Una frontera en una de las direcciones del espacio
 - ▶ Dos fronteras en la otra dirección
- Cálculo de la probabilidad de error para símbolos equiprobables
 - ▶ Símbolos de un mismo tipo: misma probabilidad de error condicional
 - ★ Ejemplos de cada tipo: a_0 (Tipo 1), a_5 (Tipo 2), a_7 (Tipo 3)

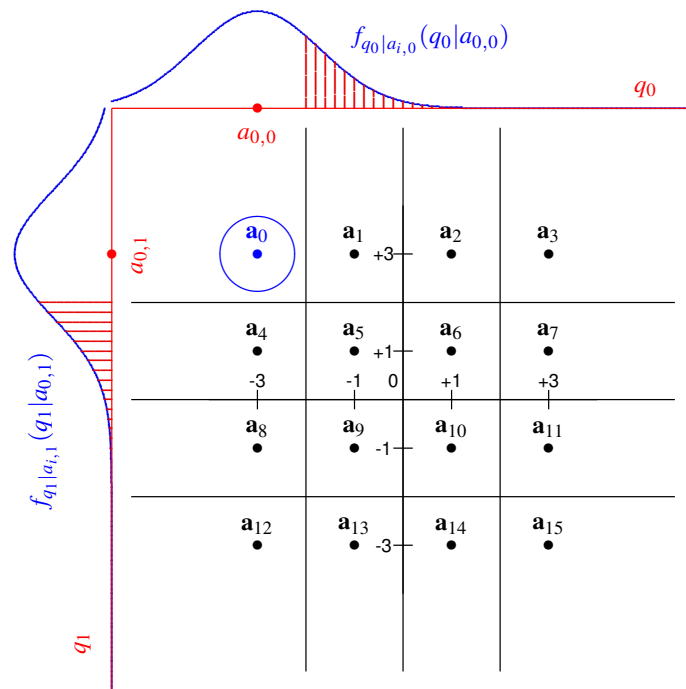
$$P_e = \sum_{i=0}^{M-1} p_A(a_i) P_{e|a_i} = 4 \times \frac{1}{16} P_{e|a_0} + 4 \times \frac{1}{16} P_{e|a_5} + 8 \times \frac{1}{16} P_{e|a_7}$$

$$= 3Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - \frac{9}{4}Q^2\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Tres tipos de regiones de decisión



Regiones de Tipo 1 (ejemplo a_0)



Regiones de Tipo 1 (ejemplo a_0)

- Dirección del espacio q_0
 - ▶ Media de la distribución gaussiana 1-D: $a_{0,0} = -3$
 - ▶ Región de decisión : $-\infty < q_0 < -2$

$$P_{a|a_{0,0}} = 1 - P_{e|a_{0,0}} = 1 - Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

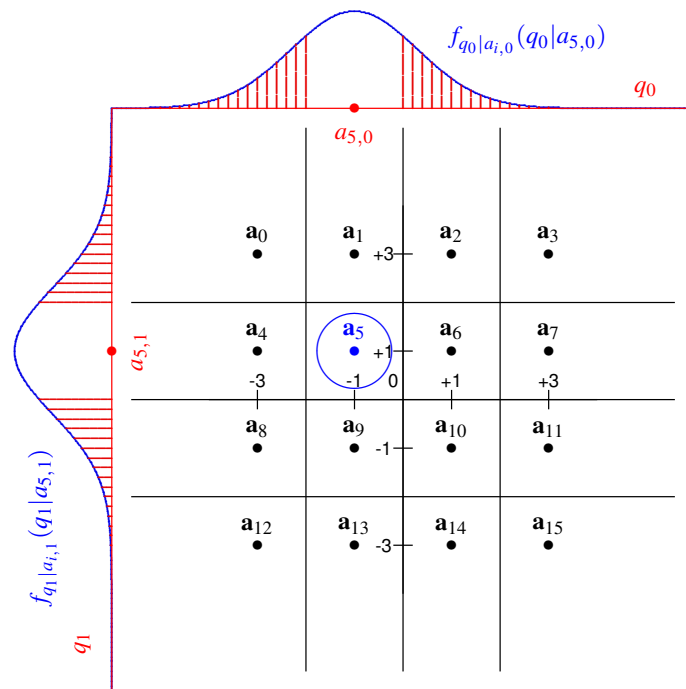
- Dirección del espacio q_1
 - ▶ Media de la distribución gaussiana 1-D: $a_{0,1} = +3$
 - ▶ Región de decisión : $+2 \leq q_1 < +\infty$

$$P_{a|a_{0,1}} = 1 - P_{e|a_{0,1}} = 1 - Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

- Probabilidad de error condicional

$$P_{e|a_0} = 1 - \left[1 - Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)\right]^2 = 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q^2\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Regiones de Tipo 2 (ejemplo a₅)



Regiones de Tipo 2 (ejemplo a₅)

- Dirección del espacio q_0
 - ▶ Media de la distribución gaussiana 1-D: $a_{5,0} = -1$
 - ▶ Región de decisión : $-2 \leq q_0 < 0$

$$P_{a|a_{5,0}} = 1 - P_{e|a_{5,0}} = 1 - 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

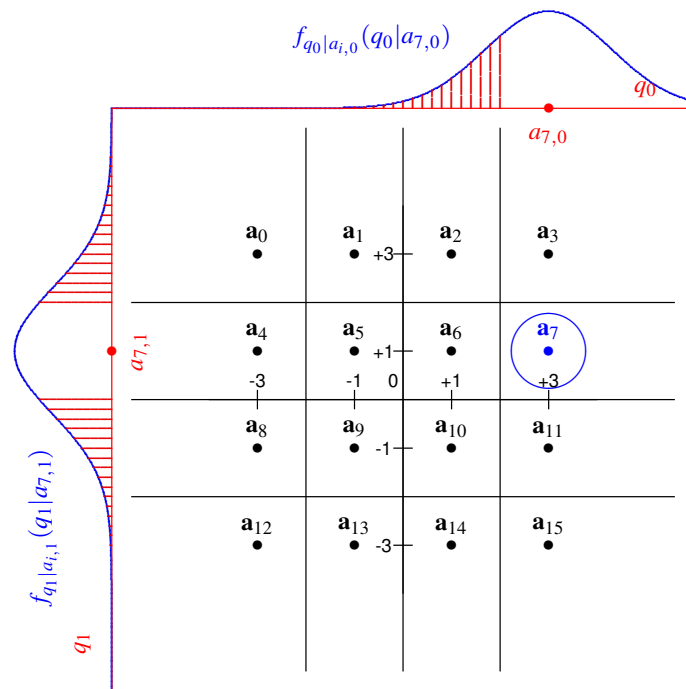
- Dirección del espacio q_1
 - ▶ Media de la distribución gaussiana 1-D: $a_{5,1} = +1$
 - ▶ Región de decisión : $0 \leq q_1 < +2$

$$P_{a|a_{5,1}} = 1 - P_{e|a_{5,1}} = 1 - 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

- Probabilidad de error condicional

$$P_{e|a_5} = 1 - \left[1 - 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)\right]^2 = 4Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - 4Q^2\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Regiones de Tipo 3 (ejemplo a_7)



Regiones de Tipo 3 (ejemplo a_7)

- Dirección del espacio q_0
 - ▶ Media de la distribución gaussiana 1-D: $a_{7,0} = +3$
 - ▶ Región de decisión : $+2 \leq q_0 < +\infty$

$$P_{a|a_{7,0}} = 1 - P_{e|a_{7,0}} = 1 - Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

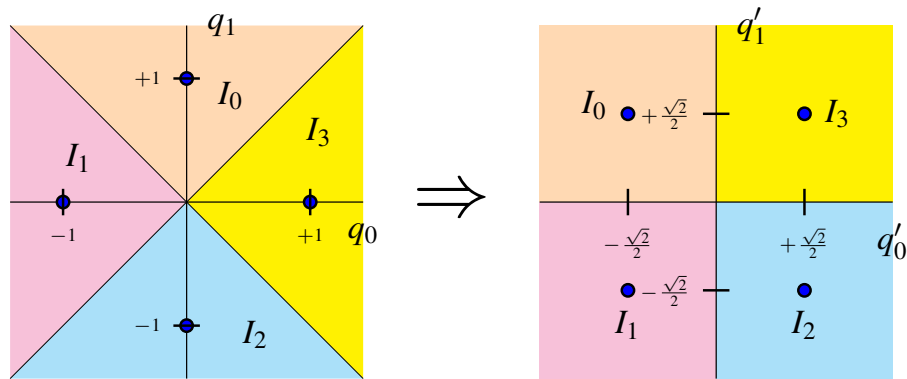
- Dirección del espacio q_1
 - ▶ Media de la distribución gaussiana 1-D: $a_{7,1} = +1$
 - ▶ Región de decisión : $0 \leq q_1 < +2$

$$P_{a|a_{7,1}} = 1 - P_{e|a_{7,1}} = 1 - 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

- Probabilidad de error condicional

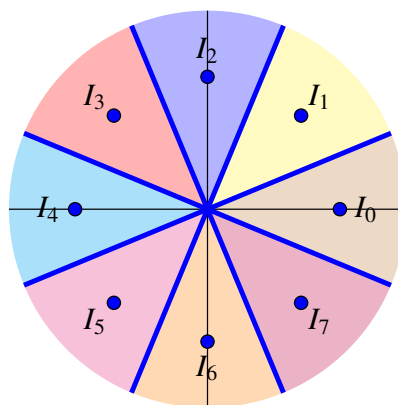
$$P_{e|a_7} = 1 - \left[1 - Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)\right] \left[1 - 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)\right] = 3Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - 2Q^2\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Decisor M -ario en espacio multidimensional (II)



- Las regiones de decisión forman una rejilla, pero no alineada con los ejes (base) del espacio
 - Cambio de coordenadas: rotación de 45°
 - Las regiones de decisión estén alineadas con los nuevos ejes
 - Es posible calcular la probabilidad de error en ese caso

Decisor M -ario en espacio multidimensional (III)



- Las regiones de decisión no forman una rejilla
 - No es posible calcular de forma analítica la probabilidad de error, ni hacer transformaciones sencillas que lo permitan
 - Se pueden calcular de forma exacta mediante cálculo numérico (ordenadores)
 - Analíticamente: se puede recurrir a aproximaciones o cotas

Aproximaciones de la probabilidad de error

- Son útiles cuando no es posible o resulta complicado calcular la probabilidad de error exacta
- Aproximación de la probabilidad de error
 - ▶ Depende de la distancia entre los símbolos
 - ★ Errores más probables: decidir un símbolo que está a mínima distancia del transmitido
 - ▶ Aproximación más utilizada
 - ★ Se asume que sólo se cometerán errores con símbolos que están a mínima distancia

$$P_e \approx k Q \left(\frac{d_{min}}{2\sqrt{N_0/2}} \right)$$

- ★ d_{min} : mínima distancia entre dos símbolos de la constelación
- ★ k : máximo número de símbolos a mínima distancia de un símbolo de la constelación

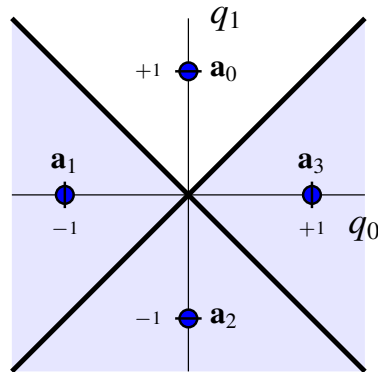
Cotas de la probabilidad de error

- Son útiles cuando no es posible o es complicado calcular la probabilidad de error exacta, y se quiere asegurar una prestación mínima (probabilidad de error máxima)
- Se obtiene una expresión que acota superiormente la probabilidad de error

$$P_e \leq \text{Cota}$$

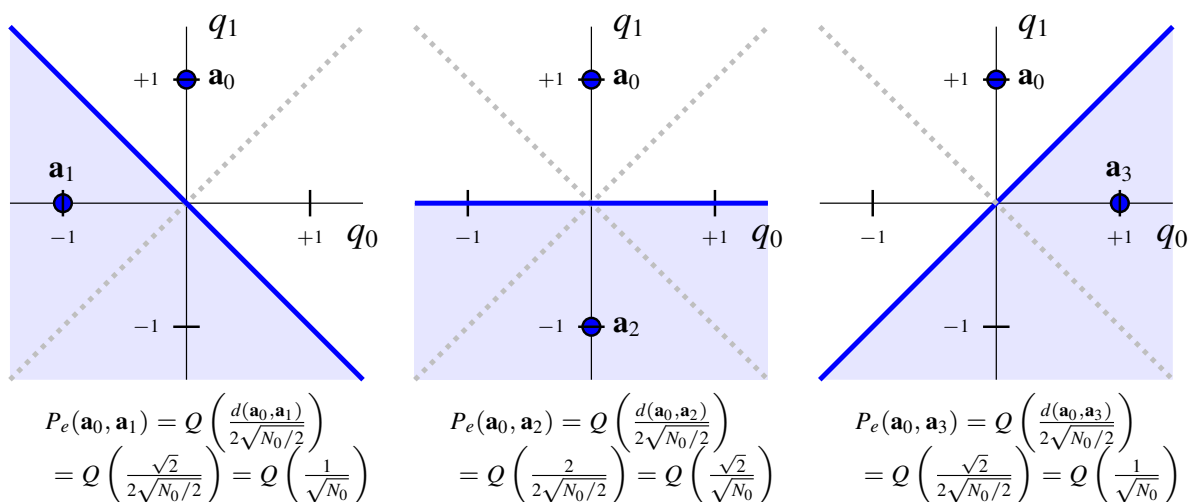
- Cotas utilizadas con mayor frecuencia
 - ▶ Cota de la unión (cota ajustada)
 - ★ Acota la probabilidad de error de forma ajustada
 - La probabilidad de error no es lejana al valor de la cota
 - ★ Su cálculo se complica para constelaciones con muchos símbolos
 - ▶ Cota holgada
 - ★ Cota menos ajustada pero más fácil de calcular

Cota de la unión - Ejemplo



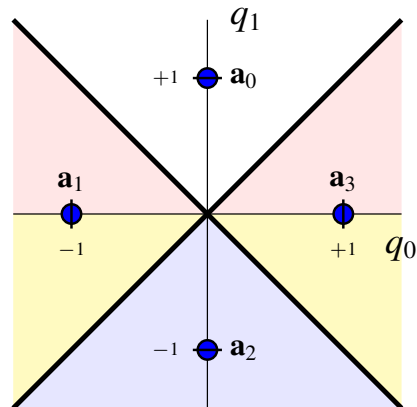
- Se va a tratar de acotar la probabilidad de error para esta constelación
- Probabilidad de error condicional $P_{e|a_0}$
 - Hay que integrar $f_{\mathbf{q}|A}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_0)$ fuera de I_0
 - ★ $f_{\mathbf{q}|A}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_0)$ es una gaussiana 2D centrada en $\mathbf{a}_0$
 - ★ Integración de $f_{\mathbf{q}|A}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_0)$ en la zona resaltada en la figura

Cota de la unión - Interpretación gráfica



- Probabilidades de error si solo está $\mathbf{a}_0$ y otro símbolo $\mathbf{a}_i$
 - Integrales de la gaussiana centered in $\mathbf{a}_0$ en los semi-planos de la figura
 - ★ Sumadas, forman una cota de la probabilidad de error

Cota de la unión - Interpretación gráfica (II)



- La Cota de la Unión es una COTA SUPERIOR
 - ▶ La suma de los tres términos integra la gaussiana en toda la región deseada
 - ★ UNA vez en las zonas en ROJO
 - ★ DOS veces en las zonas en AMARILLO
 - ★ TRES veces en las zonas en AZUL

Cota de la Unión - Límite Superior

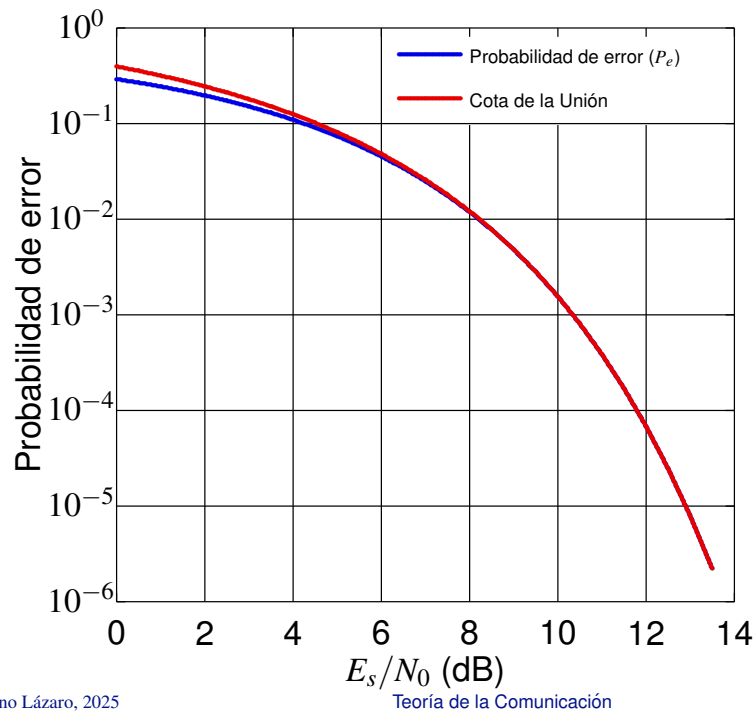
- Cota para las probabilidades de error condicionales

$$P_{e|a_0} \leq \sum_{j=1}^{M-1} P_e(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_j) \rightarrow \text{En general } P_{e|a_i} \leq \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{M-1} P_e(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)$$

- La Cota de la Unión

$$P_e \leq \sum_{i=0}^{M-1} p_A(\mathbf{a}_i) \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{M-1} P_e(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = \sum_{i=0}^{M-1} p_A(\mathbf{a}_i) \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{M-1} Q\left(\frac{d(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)}{2\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Cota de la Unión - Prestaciones



Complejidad de la Cota de la Unión - Cota Holgada

- La cota de la unión requiere computar las distancias entre cada par de símbolos y evaluar la función $Q(x)$ para cada término
 - Número de distancias (considerando la simetría $d(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = d(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_i)$)

$$N_{\text{distancias}} = \sum_{k=1}^{M-1} k$$

- ★ $M = 4 \rightarrow N_{\text{distancias}} = 6$
- ★ $M = 8 \rightarrow N_{\text{distancias}} = 28$
- ★ $M = 16 \rightarrow N_{\text{distancias}} = 120$
- ★ $M = 64 \rightarrow N_{\text{distancias}} = 2016$

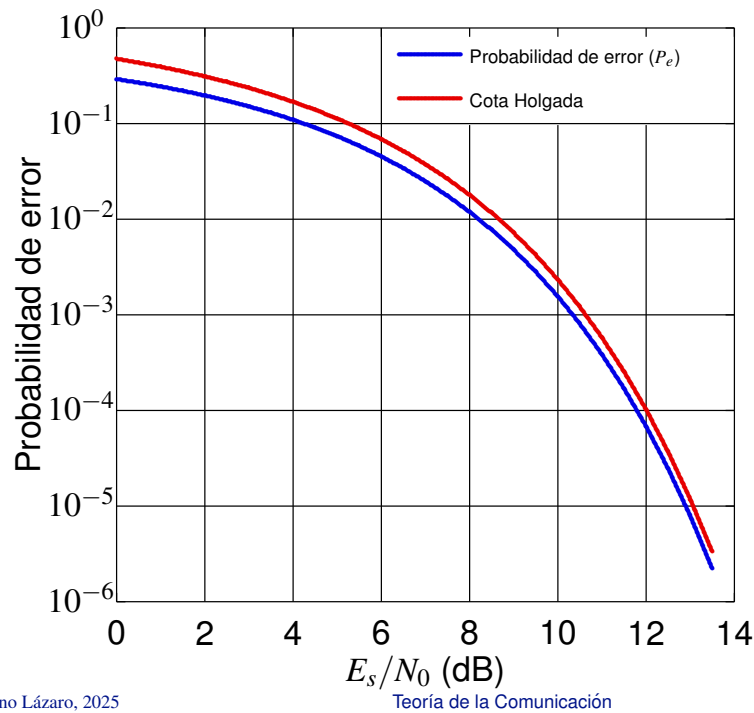
Cota holgada

- Asunción: todos los símbolos están a $d_{\min}$ de los $M - 1$ símbolos restantes

$$P_e \leq (M - 1) Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sqrt{N_0/2}}\right)$$

- ★ Como siempre habrá símbolos a distancias mayores, esta expresión es una cota para la cota de la unión, y por tanto, es una cota para la probabilidad de error

Cota Holgada



Expresiones de P_e en función de E_s/N_0

- Las prestaciones se representan a menudo como una función de la relación E_s/N_0
- Términos habituales en las probabilidades de error se suelen escribir como

$$Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sqrt{N_0/2}}\right) \text{ ó } Q\left(\frac{A}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

- En cualquier caso se pueden reescribir como

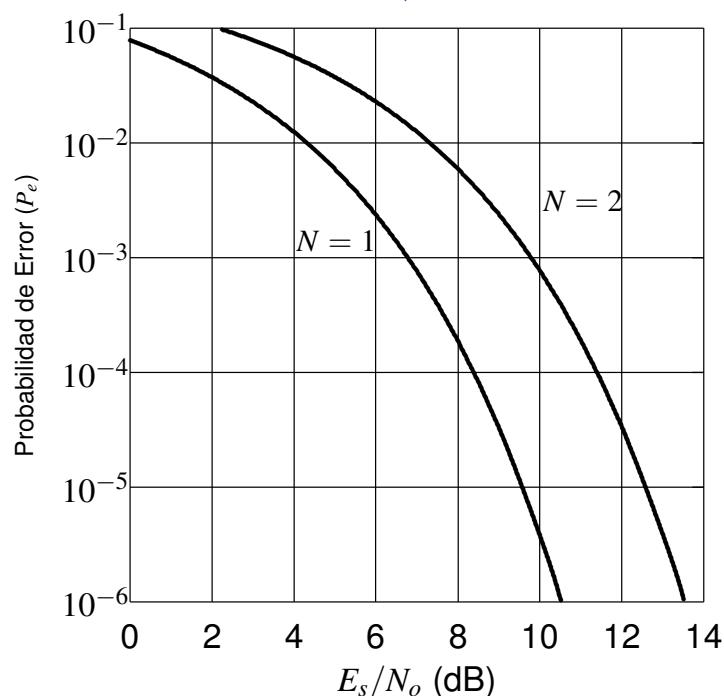
$$Q\left(\nu \sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right), \text{ donde } Q\left(\underbrace{\frac{d_{\min}}{\sqrt{2}\sqrt{E_s}}}_\nu \sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) \text{ ó } Q\left(\underbrace{\frac{A\sqrt{2}}{\sqrt{E_s}}}_\nu \sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

- Factor ν : valor constante, que depende de la constelación
 - ★ Cuanto más alto es ν , más eficiente es la constelación

Ejemplos - Constelaciones binarias equiprobables

- En este caso, para cualquier dimensión N $P_e = Q\left(\frac{d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1)}{2\sqrt{N_0/2}}\right)$
- Se compararán dos casos
 - Caso (a): Constelación binaria simétrica ($N = 1$) $\mathbf{a}_0 = +A, \mathbf{a}_1 = -A$
 - Caso (b): Constelación ortogonal ($N = 2$) $\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix}$
- Distancias y energías
 - Caso (a): $E_s = A^2, d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1) = 2A$
 - Caso (b): $E_s = A^2, d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1) = \sqrt{2}A$
- Cálculo del factor de eficiencia ν
 - Caso (a): $\nu = \frac{d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1)}{\sqrt{2}\sqrt{E_s}} = \sqrt{2} \rightarrow P_e = Q\left(\sqrt{2\frac{E_s}{N_0}}\right)$
 - Caso (b): $\nu = \frac{d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1)}{\sqrt{2}\sqrt{E_s}} = 1 \rightarrow P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$

Ejemplos - Curva de P_e en función de E_s/N_0 (en dB)



Codificador

- Convierte la secuencia de símbolos $B[n]$, (obtenida a partir de la secuencia de bits $B_b[\ell]$), en una secuencia de vectores con la representación discreta de las señales, $\mathbf{A}[n]$

- ▶ Alfabeto de $\mathbf{A}[n]$: **Constelación: $\{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{M-1}\}$, $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^N$**

- ★ $M = 2^m$ símbolos - $m = \log_2 M$ bits por símbolo

- ★ Tasa binaria: R_b - Tasa de símbolo: R_s

$$R_b = \frac{1}{T_b} \text{ bits/s} \quad R_s = \frac{1}{T} \text{ símbolos/s (baudios)} \quad R_b = m \times R_s$$

- Restricciones en el diseño de la constelación: **Prestaciones (P_e, BER)** y **Energía (E_s)**

- ▶ Prestaciones: distancia entre símbolos (distancia mínima)

- ▶ Energía por símbolo: norma al cuadrado

$$d(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = \sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} |a_{i,k} - a_{j,k}|^2}, \quad d_{\min} = \min_{i \neq j} d(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)$$

$$\mathcal{E}\{\mathbf{a}_i\} = \|\mathbf{a}_i\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |a_{i,k}|^2$$

- ▶ Compromiso: garantizar una mínima distancia, con los símbolos lo más cercanos posibles al origen de coordenadas

- ★ Media de la constelación nula: **$E[\mathbf{a}_i] = [0, 0, \dots, 0]^T = \mathbf{0}$**

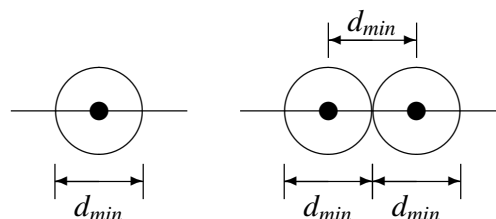
Codificador - Empaquetado de esferas

- El compromiso entre distancia y energía se puede entender como un problema de empaquetado de esferas de un diámetro constante
 - ▶ Garantizar unas prestaciones mínimas equivale a garantizar una distancia mínima

$$P_e \approx k Q \left(\frac{d_{\min}}{2\sqrt{N_0/2}} \right)$$

- ▶ Símbolo: esfera centrada en $\mathbf{a}_i$ con diámetro $d_{\min}$

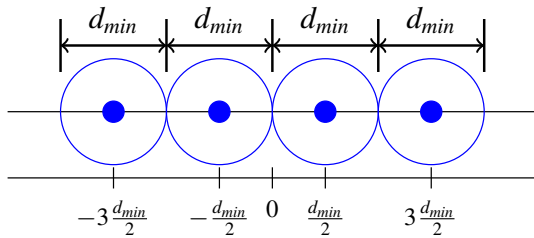
- ★ Dos esferas en contacto están a distancia $d_{\min}$



- ▶ El problema de diseño se puede plantear como
 - ★ Colocar M esferas de diámetro $d_{\min}$ en el menor espacio posible (espacio N -D) y centradas en el origen (media nula)

Empaquetado de esferas

● Diseño en espacio 1-D

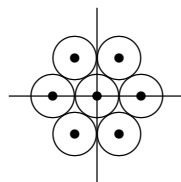


M puntos equiespaciados - Coordenadas:

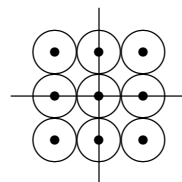
$$\left\{ \pm \frac{d_{min}}{2}, 3 \frac{d_{min}}{2}, \dots, \pm (M-1) \frac{d_{min}}{2} \right\}$$

● Diseño en espacio 2-D

- ▶ Se forman círculos a partir de una esfera central
- ▶ Se recolocan para que la media sea nula

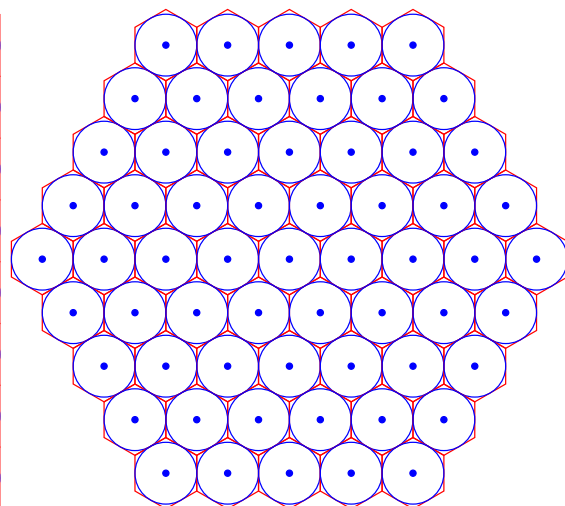
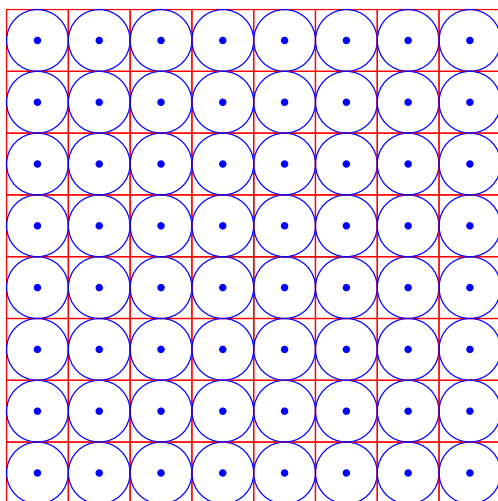


Espacio 2D - SÍ



Espacio 2D - NO

Constelaciones Hexagonales vs. Reticulares



Constelación equivalente con media nula

- La probabilidad de error depende de las posiciones relativas entre símbolos
 - ▶ Estas posiciones relativas definen las distancias $d(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)$
- Distancias fijas: mínima E_s si la constelación tiene media nula
- Transformación en constelación equivalente con media nula

▶ Media de la constelación $E[\mathbf{a}_i] = \sum_{i=0}^{M-1} p_A(\mathbf{a}_i) \mathbf{a}_i$

★ Vector N dimensional (un valor por cada coordenada de $\mathbf{a}_i$)

- ▶ Se resta la media a cada símbolo de la constelación inicial

$$\mathbf{a}'_i = \mathbf{a}_i - E[\mathbf{a}_i]$$

★ La media de la nueva constelación es nula

$$E[\mathbf{a}'_i] = \sum_{i=0}^{M-1} \underbrace{p_{A'}(\mathbf{a}'_i)}_{p_A(\mathbf{a}_i)} \mathbf{a}'_i = [0, 0, \dots, 0]^T = \mathbf{0}$$

Constelación equivalente con media nula - Ejemplo

- Constelación con $M = 4$ símbolos, $p_A(\mathbf{a}_i) = \frac{1}{4} \forall i$

$$\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} +\frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ +2 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} +\frac{3}{2} \\ +2 \end{bmatrix}$$

- ▶ Energía media por símbolo

$$E_s = \frac{1}{4} \left[\left(-\frac{1}{2} \right)^2 + 0^2 \right] + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{3}{2} \right)^2 + 0^2 \right] + \frac{1}{4} \left[\left(-\frac{1}{2} \right)^2 + 2^2 \right] + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{3}{2} \right)^2 + 2^2 \right] = \frac{13}{4} = 3,25$$

- Media de la constelación

$$E[\mathbf{a}_i] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} +\frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ +2 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} +\frac{3}{2} \\ +2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\frac{1}{2} \\ +1 \end{bmatrix}$$

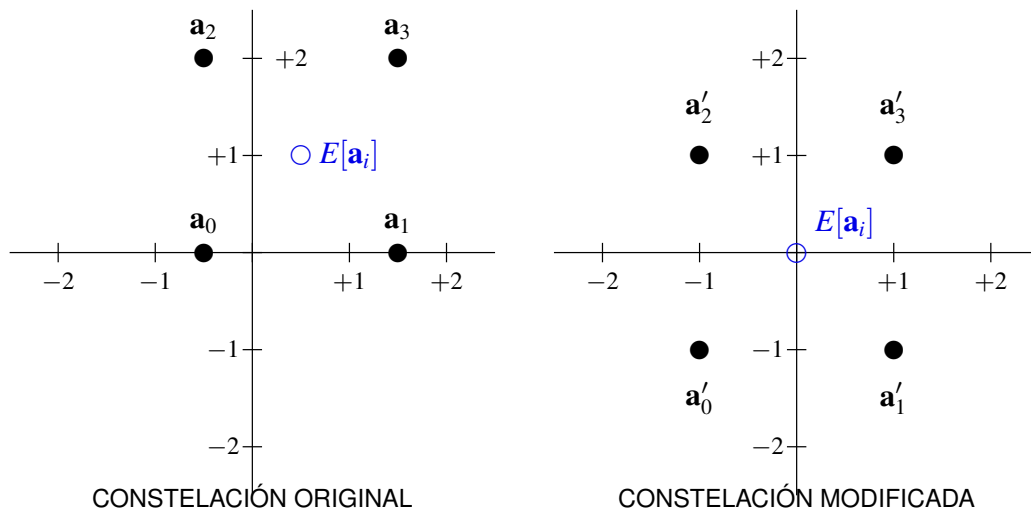
- Constelación modificada: $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i - E[\mathbf{a}_i]$

$$\mathbf{a}'_0 = \mathbf{a}_0 - E[\mathbf{a}_i] = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}'_1 = \mathbf{a}_1 - E[\mathbf{a}_i] = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}'_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}'_3 = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

- ▶ Energía media por símbolo

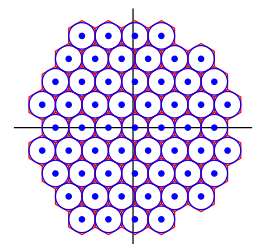
$$E'_s = \frac{1}{4} \left[(-1)^2 + (-1)^2 \right] + \frac{1}{4} \left[(+1)^2 + (-1)^2 \right] + \frac{1}{4} \left[(-1)^2 + (+1)^2 \right] + \frac{1}{4} \left[(+1)^2 + (+1)^2 \right] = 2$$

Constelación equivalente con media nula - Ejemplo (II)



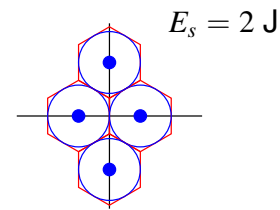
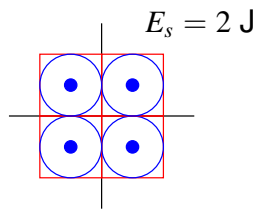
Diseño del codificador

- Empaquetado de esferas
 - ▶ Óptimo: mínima P_e para una E_s dada
 - ▶ Constelaciones hexagonales
 - ▶ Regiones de decisión hexagonales
- Consideraciones prácticas
 - ▶ Simplicidad de implementación del transmisor
 - ▶ Simplicity of the receiver - Regiones de decisión
 - ▶ Energía por símbolo constante
 - ▶ Relación potencia de pico / potencia media

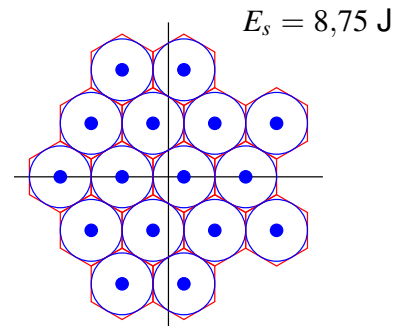
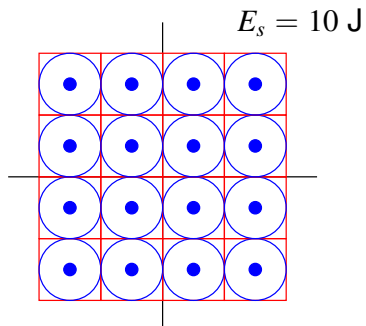


Otras constelaciones: QAM, PSK, unipolar, orthogonal, ...

Constelaciones Hexagonales

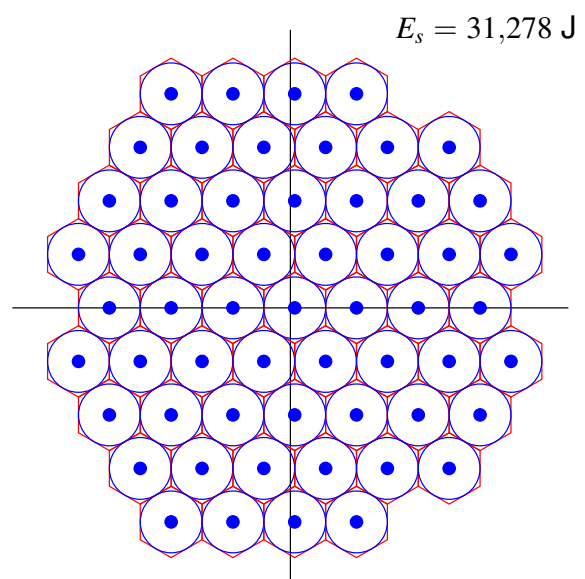
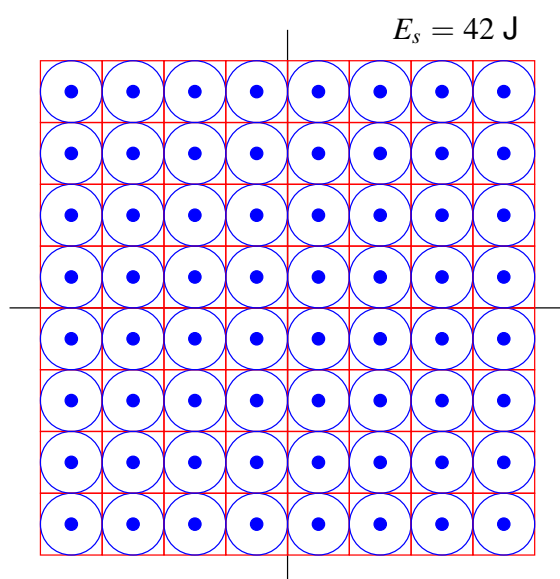


Constelaciones QAM y Hexagonal para $M = 4$ (factor unidad en E_s)



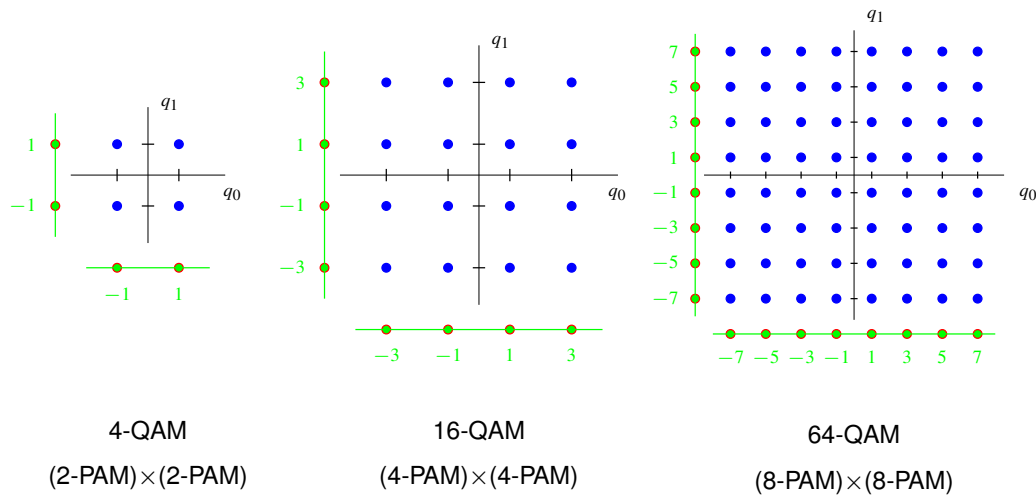
Constelaciones QAM y Hexagonal para $M = 16$ (factor 0,875 en E_s)

Constelaciones Hexagonales (II)



Constelaciones QAM y Hexagonal para $M = 64$ (factor 0,7447 en E_s)

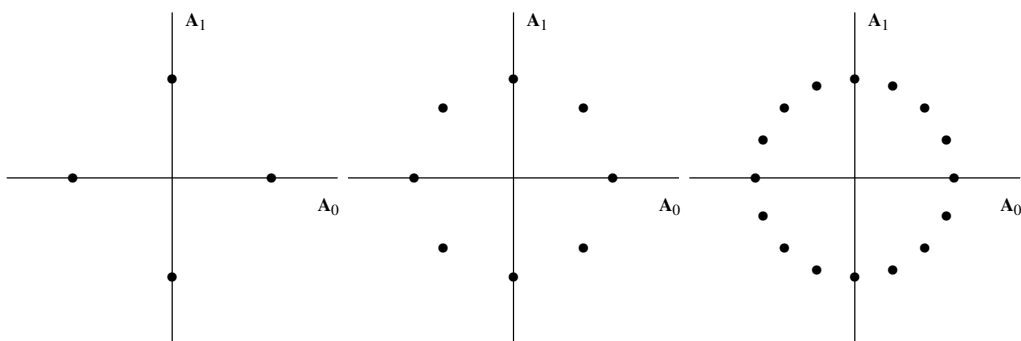
Constelaciones QAM



● Puntos en una retícula

- Facilidad de implementación de transmisor / receptor
- ★ Generación/Detección: de forma independiente para cada coordenada

Constelaciones PSK



Constelaciones 4-PSK (QPSK), 8-PSK y 16-PSK

● Puntos en un círculo de radio constante

- Energía constante para todos los símbolos

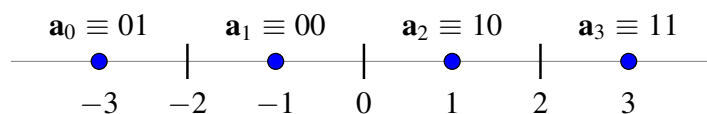
Asignación binaria

- Asignación binaria: Conversión Bits a símbolos $B_b[\ell] \rightarrow B[n] (\mathbf{A}[n])$
 - ▶ m bits se transmiten en cada símbolo $b_i (\mathbf{a}_i)$

$M = 2^m$ símbolos $\rightarrow m = \log_2 M$ bits/símbolo
- Objetivo de la asignación binaria (valores de los m bits) a cada símbolo
 - ▶ Minimización de la probabilidad de error de bit (BER: *Bit Error Rate*)
- Técnica de asignación binaria óptima
 - ▶ Codificación de Gray

Codificación de Gray

- Los bloques de m bits asignados a símbolos que están a mínima distancia difieren sólo en 1 bit

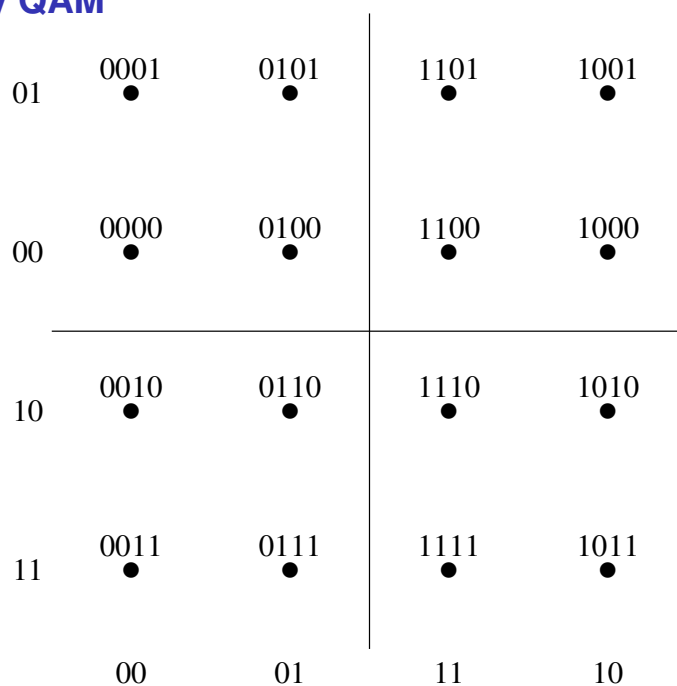


- ▶ Para relaciones señal a ruido altas
 - ★ Mayoría de los errores de símbolo: decisión de un símbolo a mínima distancia
 - ★ Para estos errores: un sólo bit erróneo de los m bits

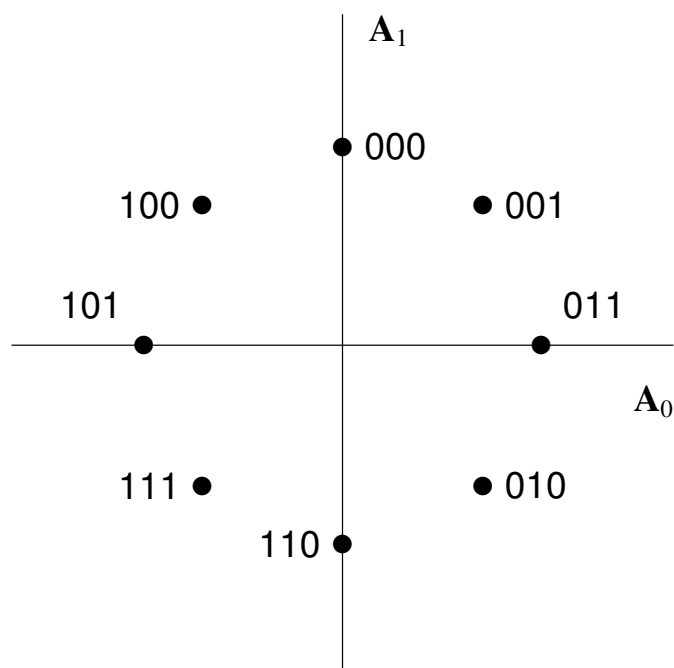
$$BER \approx \frac{1}{m} P_e$$

$m = \log_2(M)$: número de bits por símbolo

Codificación Gray QAM



Codificación Gray PSK



Cálculo de la probabilidad de error de bit (BER)

- Se promedia la BER condicional para $\mathbf{a}_i$

$$BER = \sum_{i=0}^{M-1} p_A(a_i) BER_{a_i}$$

- Cálculo de las BER condicionales

$$BER_{a_i} = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{M-1} P_{e|a_i \rightarrow a_j} \frac{m_{e|a_i \rightarrow a_j}}{m}$$

- $P_{e|a_i \rightarrow a_j}$: probabilidad de transmitiendo $\mathbf{A} = \mathbf{a}_i$, decidir $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{a}_j$

$$P_{e|a_i \rightarrow a_j} = \int_{\mathbf{q}_0 \in I_j} f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q}_0|\mathbf{a}_i) d\mathbf{q}_0$$

- $m_{e|a_i \rightarrow a_j}$: número de errores de bit que conlleva esa decisión
- m : número de bits por símbolo de la constelación

Ejemplo - Espacio 1-D M -ario

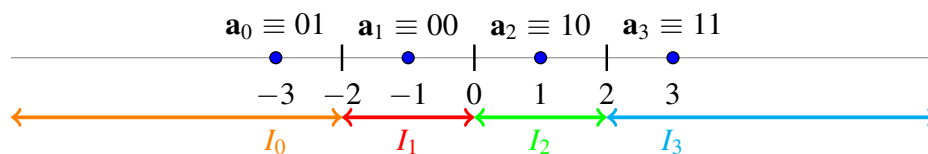
- Ejemplo:

- $M = 4$, símbolos equiprobables $p_A(\mathbf{a}_i) = \frac{1}{4}$
- Constelación: $\mathbf{a}_0 = -3, \mathbf{a}_1 = -1, \mathbf{a}_2 = +1, \mathbf{a}_3 = +3$
- Regiones de decisión: umbrales

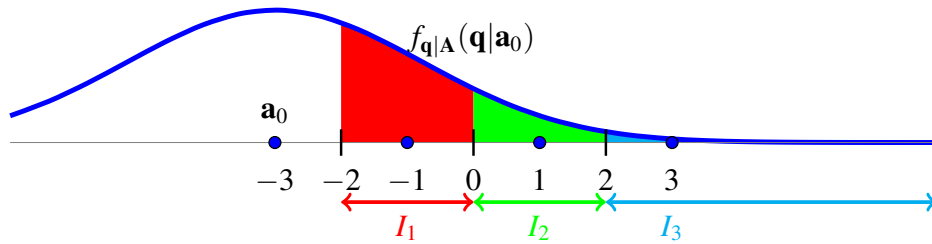
$$q_{u1} = -2, q_{u2} = 0, q_{u3} = +2$$

$$I_0 = (-\infty, -2], I_1 = (-2, 0], I_2 = (0, +2], I_3 = (+2, +\infty)$$

- Asignación binaria



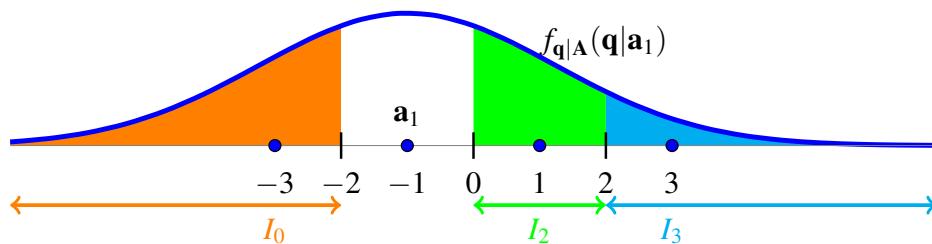
Cálculo de BER_{a_0}



- Asignación binaria: $\mathbf{a}_0 \equiv 01, \mathbf{a}_1 \equiv 00, \mathbf{a}_2 \equiv 10, \mathbf{a}_3 \equiv 11$
- Distribución $f_{q|A}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_0)$: gaussiana de media $\mathbf{a}_0$ y varianza $N_0/2$

$$BER_{a_0} = \underbrace{\left[Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|a_0 \rightarrow a_1}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{m_{e|a_0 \rightarrow a_1}}{m}} + \underbrace{\left[Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{5}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|a_0 \rightarrow a_2}} \times \underbrace{\frac{2}{2}}_{\frac{m_{e|a_0 \rightarrow a_2}}{m}} + \underbrace{\left[Q\left(\frac{5}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|a_0 \rightarrow a_3}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{m_{e|a_0 \rightarrow a_3}}{m}}$$

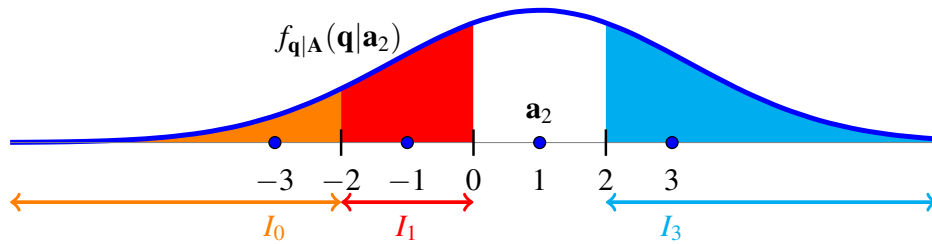
Cálculo de BER_{a_1}



- Asignación binaria: $\mathbf{a}_0 \equiv 01, \mathbf{a}_1 \equiv 00, \mathbf{a}_2 \equiv 10, \mathbf{a}_3 \equiv 11$
- Distribución $f_{q|A}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_1)$: gaussiana de media $\mathbf{a}_1$ y varianza $N_0/2$

$$BER_{a_1} = \underbrace{\left[Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|a_1 \rightarrow a_0}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{m_{e|a_1 \rightarrow a_0}}{m}} + \underbrace{\left[Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|a_1 \rightarrow a_2}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{m_{e|a_1 \rightarrow a_2}}{m}} + \underbrace{\left[Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|a_1 \rightarrow a_3}} \times \underbrace{\frac{2}{2}}_{\frac{m_{e|a_1 \rightarrow a_3}}{m}}$$

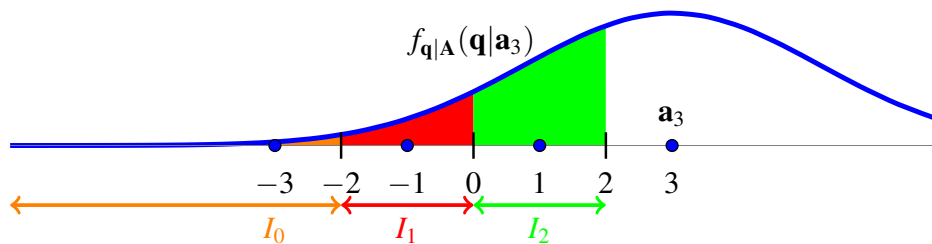
Cálculo de BER_{a_2}



- Asignación binaria: $\mathbf{a}_0 \equiv 01, \mathbf{a}_1 \equiv 00, \mathbf{a}_2 \equiv 10, \mathbf{a}_3 \equiv 11$
- Distribución $f_{q|A}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_2)$: gaussiana de media $\mathbf{a}_2$ y varianza $N_0/2$

$$BER_{a_2} = \underbrace{\left[Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|\mathbf{a}_2 \rightarrow \mathbf{a}_0}} \times \underbrace{\frac{2}{2}}_{\frac{m_{e|\mathbf{a}_2 \rightarrow \mathbf{a}_0}}{m}} + \underbrace{\left[Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|\mathbf{a}_2 \rightarrow \mathbf{a}_1}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{m_{e|\mathbf{a}_2 \rightarrow \mathbf{a}_1}}{m}} + \underbrace{\left[Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|\mathbf{a}_2 \rightarrow \mathbf{a}_3}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{m_{e|\mathbf{a}_2 \rightarrow \mathbf{a}_3}}{m}}$$

Cálculo de BER_{a_3}



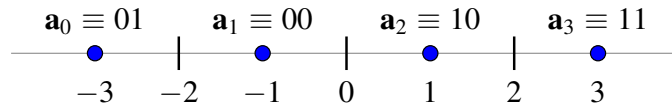
- Asignación binaria: $\mathbf{a}_0 \equiv 01, \mathbf{a}_1 \equiv 00, \mathbf{a}_2 \equiv 10, \mathbf{a}_3 \equiv 11$
- Distribución $f_{q|A}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_3)$: gaussiana de media $\mathbf{a}_3$ y varianza $N_0/2$

$$BER_{a_3} = \underbrace{\left[Q\left(\frac{5}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|\mathbf{a}_3 \rightarrow \mathbf{a}_0}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{m_{e|\mathbf{a}_3 \rightarrow \mathbf{a}_0}}{m}} + \underbrace{\left[Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{5}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|\mathbf{a}_3 \rightarrow \mathbf{a}_1}} \times \underbrace{\frac{2}{2}}_{\frac{m_{e|\mathbf{a}_3 \rightarrow \mathbf{a}_1}}{m}} + \underbrace{\left[Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|\mathbf{a}_3 \rightarrow \mathbf{a}_2}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{m_{e|\mathbf{a}_3 \rightarrow \mathbf{a}_2}}{m}}$$

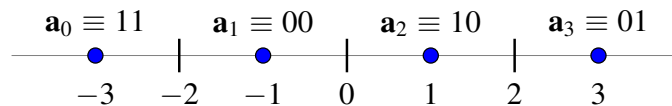
Influencia de la asignación binaria

- Asignación anterior

$$BER = \frac{3}{4}Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_o/2}}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_o/2}}\right) - \frac{1}{4}Q\left(\frac{5}{\sqrt{N_o/2}}\right)$$



- Si se cambia la asignación binaria



- No varían los términos $P_{e|a_i \rightarrow a_j}$
- Sí varían los términos $m_{e|a_i \rightarrow a_j} \Rightarrow$ Varía la BER !!!

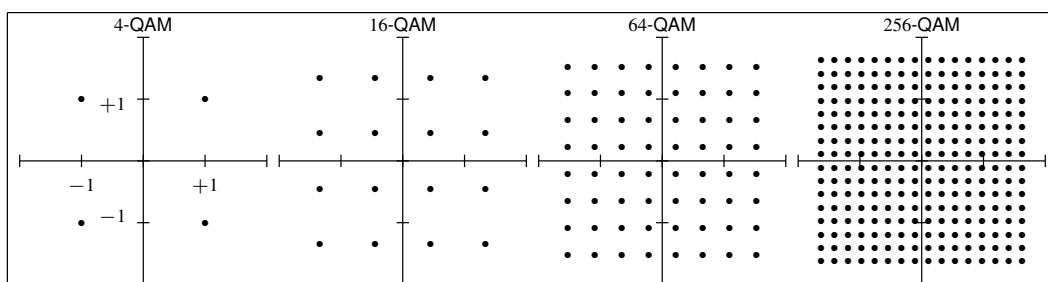
$$BER = \frac{5}{4}Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_o/2}}\right) - \frac{1}{4}Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_o/2}}\right)$$

Densidad de las constelaciones

- Aumento del tamaño de la constelación (M símbolos):
 - Aumento en la tasa binaria
 - Aumenta el número de bits por símbolo $m = \log_2 M$
 - Reducción de prestaciones para una E_s dada
 - Reducción de la distancia entre puntos de la constelación

Ejemplo para constelaciones M -QAM

M (símbolos)	m (bits/símbolo)	E_s con niveles normalizados ($d_{min} = 2$)	d_{min} con $E_s = 2$
4	2	2	2
16	4	10	0,8944
64	8	42	0,4364
256	16	170	0,2169



BER en función de E_s/N_0 (o de E_b/N_0)

- BER se representa a menudo como una función de la relación E_s/N_0 o de la relación E_b/N_0

► E_b : Energía media por bit de información $E_b = \frac{E_s}{m}$

- Términos habituales en las probabilidades de error se suelen escribir como

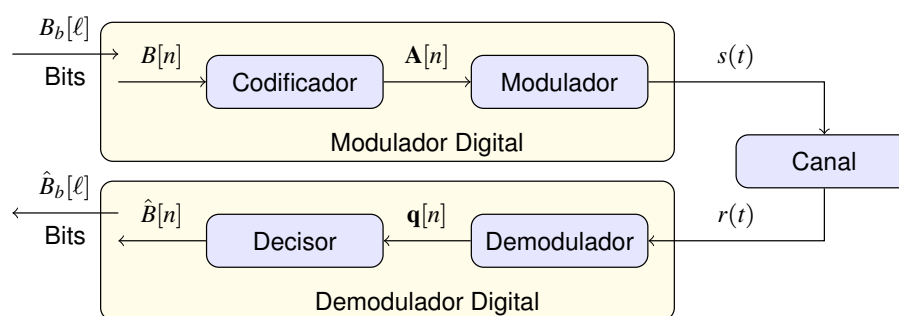
$$Q\left(\frac{A}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

- En cualquier caso se pueden escribir como

$$Q\left(v \sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) \text{ o } Q\left(v\sqrt{m} \sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right), \text{ donde } v = \frac{A\sqrt{2}}{\sqrt{E_s}}$$

► En este caso v es un entero, que depende de la constelación

Transmisión digital - Tasas de transmisión



- Codificador: constelación de M símbolos con $m = \log_2 M$ bits/símbolo
- Dos tasas de transmisión: transmisión de 1 símbolo (m bits) cada T segundos

► Tasa de símbolo $R_s = \frac{1}{T}$ símbolos/s (baudios)

► Tasa de bit (binaria) $R_b = m \times R_s$ bits/s

Tiempo de bit: $T_b = \frac{T}{m}$ segundos

Generación de señales

- Codificador: constelación de M símbolos (dimensión N)
 - ▶ Asignación binaria de m bits por símbolo
 - ★ Codificación de Gray
- Modulador: base ortonormal de dimensión N

- ▶ Asociación: una señal (de T segundos) a cada símbolo

$$s_i(t) = \sum_{j=0}^{N-1} a_{i,j} \times \phi_j(t)$$

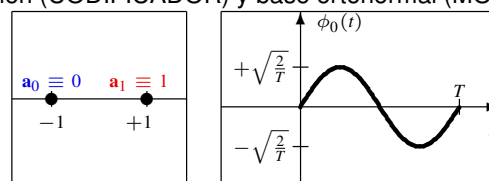
- Generación de la señal por bloques de T segundos (intervalos de símbolo)
 - ▶ Si $A[n] = \mathbf{a}_k$ entonces $s(t) = s_k(t - nT)$ en $nT \leq (n+1)T$
 - ★ En el intervalo de símbolo asociado a $A[n]$ ($nT \leq (n+1)T$) se pone la forma de onda asociada al símbolo correspondiente
 - ▶ Expresión analítica de la señal completa

$$s(t) = \sum_n \sum_{j=0}^{N-1} A_j[n] \times \phi_j(t - nT)$$

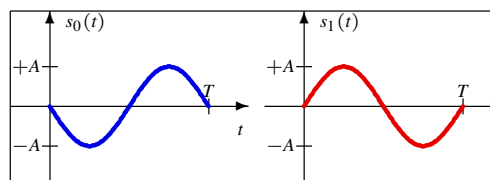
$A_j[n]$: coordenada de índice j del símbolo $A[n]$

Generación de señales - Ejemplo A

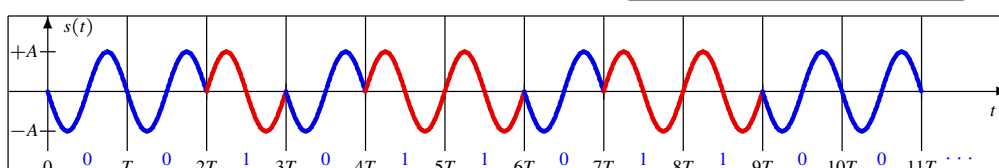
Constelación (CODIFICADOR) y base ortonormal (MODULADOR)



Señales asociadas a cada uno de los símbolos: $s_0(t) = -1 \times \phi_0(t)$, $s_1(t) = +1 \times \phi_0(t)$

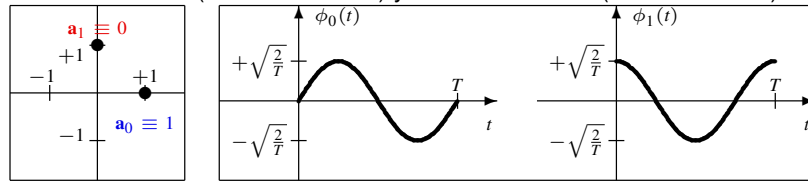


Señal modulada para la siguiente secuencia binaria $B_b[\ell] = 00101101100 \dots$

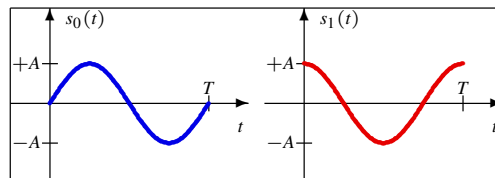


Generación de señales - Ejemplo B

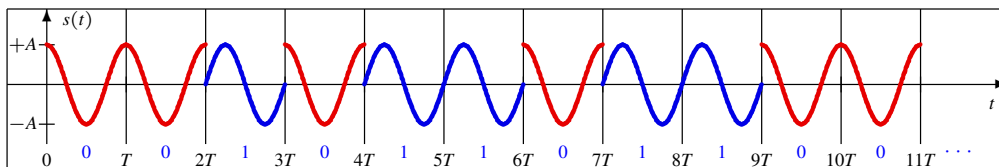
Constelación (CODIFICADOR) y base ortonormal (MODULADOR)



Señales asociadas a cada uno de los símbolos $s_0(t) = +1 \times \phi_0(t) + 0 \times \phi_1(t)$, $s_1(t) = 0 \times \phi_0(t) + 1 \times \phi_1(t)$

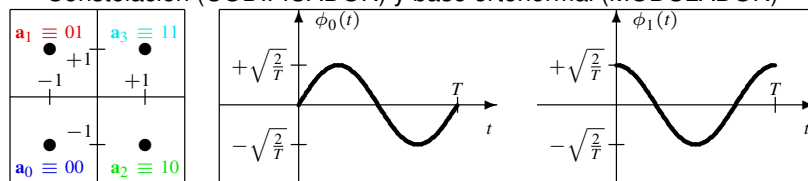


Señal modulada para la siguiente secuencia binaria $B_b[\ell] = 00101101100 \dots$

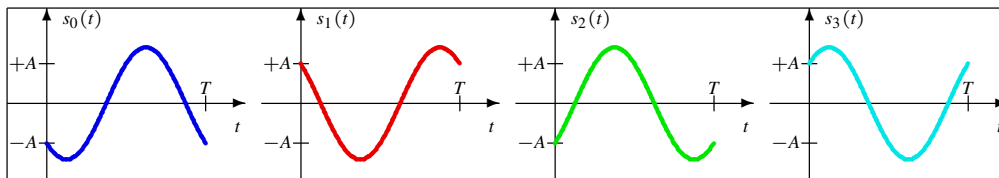


Generación de señales - Ejemplo C

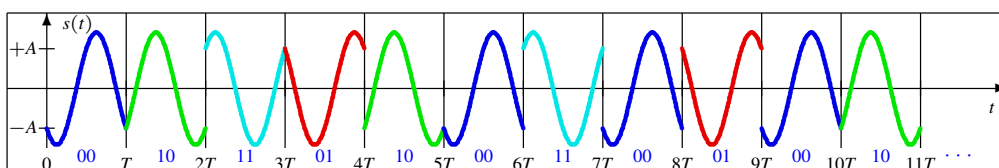
Constelación (CODIFICADOR) y base ortonormal (MODULADOR)



Señales $s_0(t) = -1 \times \phi_0(t) - 1 \times \phi_1(t)$, $s_1(t) = -1 \times \phi_0(t) + 1 \times \phi_1(t)$, $s_2(t) = +1 \times \phi_0(t) - 1 \times \phi_1(t)$, $s_3(t) = +1 \times \phi_0(t) + 1 \times \phi_1(t)$

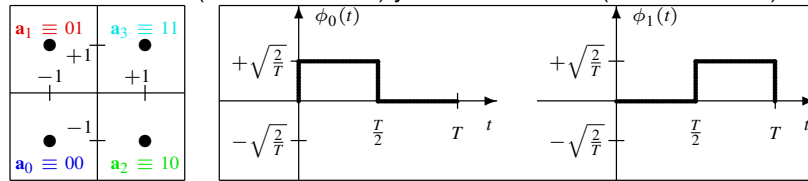


Señal modulada para la siguiente secuencia binaria $B_b[\ell] = 0010110110001100010010 \dots$

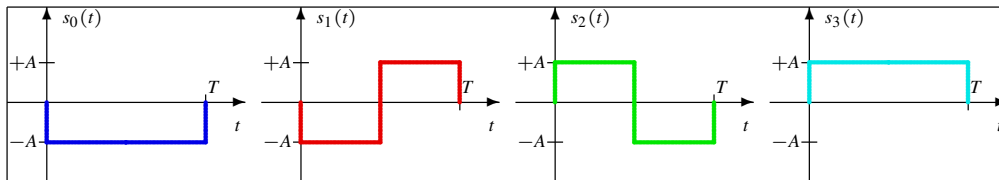


Generación de señales - Ejemplo D

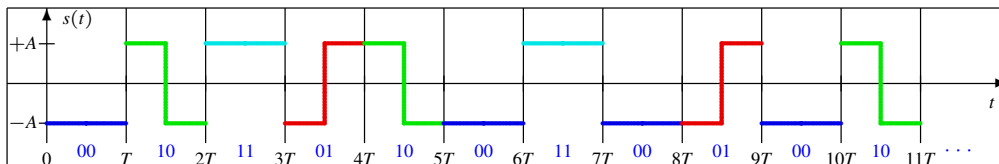
Constelación (CODIFICADOR) y base ortonormal (MODULADOR)



Señales $s_0(t) = -1 \times \phi_0(t) - 1 \times \phi_1(t)$, $s_1(t) = -1 \times \phi_0(t) + 1 \times \phi_1(t)$, $s_2(t) = +1 \times \phi_0(t) - 1 \times \phi_1(t)$, $s_3(t) = +1 \times \phi_0(t) + 1 \times \phi_1(t)$



Señal modulada para la siguiente secuencia binaria $B_b[\ell] = 00\ 10\ 11\ 01\ 10\ 00\ 11\ 00\ 01\ 00\ 10\ \dots$



Elección del modulador

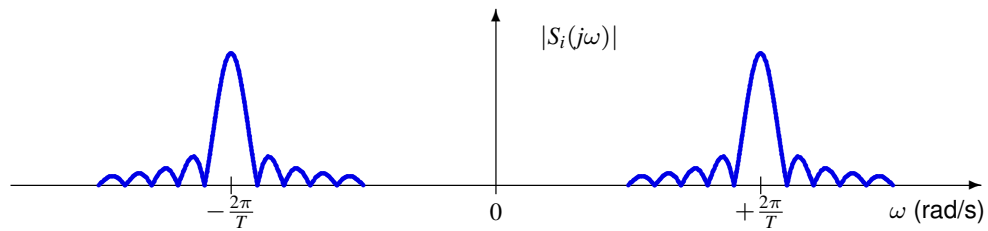
- Se ha visto que un mismo codificador se puede combinar con múltiples moduladores (conjuntos de N funciones formando una base ortonormal)
- Un codificador (constelación+asignación binaria) determina
 - ▶ Energía de las señales a transmitir
 - ▶ Prestaciones
 - ★ Probabilidad (tasa) de error de símbolo P_e
 - ★ Probabilidad (tasa) de error de bit BER
- Elección del modulador
 - ▶ **Adecuación al canal de transmisión**
 - ★ Adecuación perfecta:

$$\phi_i(t) * h(t) = \phi_i(t) \Leftrightarrow \Phi_i(j\omega) \times H(j\omega) = \Phi_i(j\omega)$$

- ★ Difícil de conseguir de forma exacta en la práctica
- ★ Búsqueda de señales cuya respuesta en frecuencia esté en la banda de paso del canal de transmisión
 - Distinción entre canales en banda base y paso banda

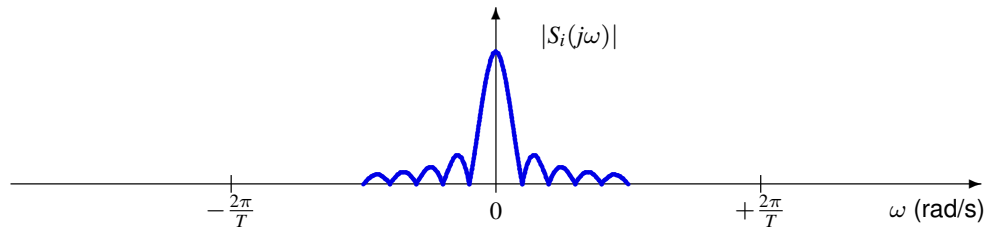
Respuesta en frecuencia de las señales

- Depende de la respuesta en frecuencia de los elementos de la base
- Ejemplo C



- ▶ Señales apropiadas para transmisión en canales con “buena respuesta” en torno a la frecuencia $\frac{2\pi}{T}$ radianes/s

- Ejemplo D



- ▶ Señales apropiadas para transmisión en canales con “buena respuesta” en bajas frecuencias