Capítulo 3 : Ejercicios

Ejercicio 3.1 Para el conjunto de símbolos de la Figura 3.1

a) Aplique el procedimiento de Gram-Schmidt para obtener una base ortonormal que permita la representación vectorial de las señales

   I) Obtenga la base ortonormal, y diga cuál es la dimension del espacio de señales.

   II) Obtenga la representación vectorial de las señales.

b) Calcule la energía de cada señal a partir de su representación vectorial (compárela con la obtenida a partir de la definición temporal de la señal).

c) Calcule la energía de la diferencia entre cada una las seis señales y la señal $s_0(t)$ a partir de la representación vectorial de las señales (puede compararla con la obtenida en el dominio temporal).

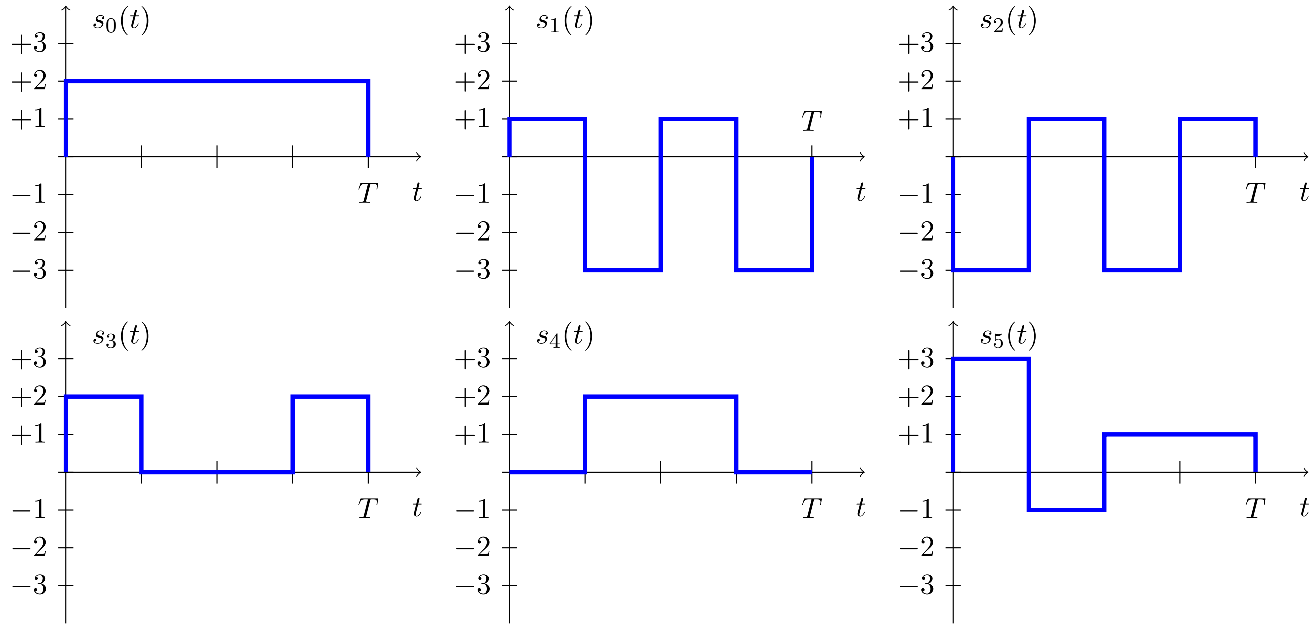


Figura 3.1: Señales para el Ejercicio 3.1.

Ejercicio 3.2 Un sistema de comunicaciones binario emplea pulsos rectangulares causales de duración T y amplitudes $\pm A$ para transmitir información a una velocidad de 10 kbits/s. Si la densidad espectral de potencia del ruido aditivo gausiano es $N_0/2$, con $N_0 = 10^{-4}$ W/Hz, y suponiendo que ambos símbolos se transmiten con la misma probabilidad, determine el valor de A necesario para:

a) Obtener una probabilidad de error de símbolo aproximada $P_e \approx 10^{-4}$.

b) Obtener una probabilidad de error de bit aproximada $BER \approx 10^{-6}$.

Ejercicio 3.3 Un sistema de comunicaciones binario utiliza una constelación con dos símbolos, $\boldsymbol{a}_0 = +A$ y $\boldsymbol{a}_1 = 0$. Si se transmite sobre un canal aditivo gausiano, con densidad espectral de potencia $N_0/2$, y las probabilidades de los símbolos son $p_A(\boldsymbol{a}_0) = 1/3$, y $p_A(\boldsymbol{a}_1) = 2/3$:

a) Calcule el decisor óptimo (es decir, calcule el umbral de decisión).

b) Calcule la probabilidad de error.

Ejercicio 3.4 Se tiene la constelación de la Figura 3.2. Se supone que los símbolos tienen la misma probabilidad. Tomando $T = 1$

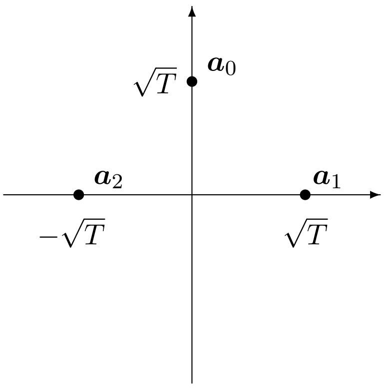


Figura 3.2: Constelación Ejercicio 3.4.

a) Calcule al energía media por símbolo, E_s.

b) Diseñe una constelación alternativa que, con la misma probabilidad de error, tenga la mínima energía media por símbolo. Calcule el nuevo valor de E_s.

c) Para cualquiera de las dos constelaciones, obtenga un límite de la probabilidad de error mediante la cota de la unión y la cota holgada.

Ejercicio 3.5 Para la implementación de un sistema de comunicaciones de tres símbolos equiprobables, el modulador transmite las tres señales mostradas en la Figura 3.3.

a) Calcule la energía media por símbolo.

b) Calcule alguna cota de la probabilidad de error.

Ejercicio 3.6 Un sistema de comunicaciones emplea la constelación unidimensional

$$\boldsymbol{a}_0 = 0,\ \boldsymbol{a}_1 = 1,\ \boldsymbol{a}_2 = 2,\ \boldsymbol{a}_3 = 3,$$

Las observaciones proporcionadas por el demodulador están caracterizadas por el canal discreto equivalente

$$q[n] = A[n] + z[n],$$

donde cada muestra del término de ruido, $z[n]$, tiene la función densidad de probabilidad representada en la Figura 3.4.

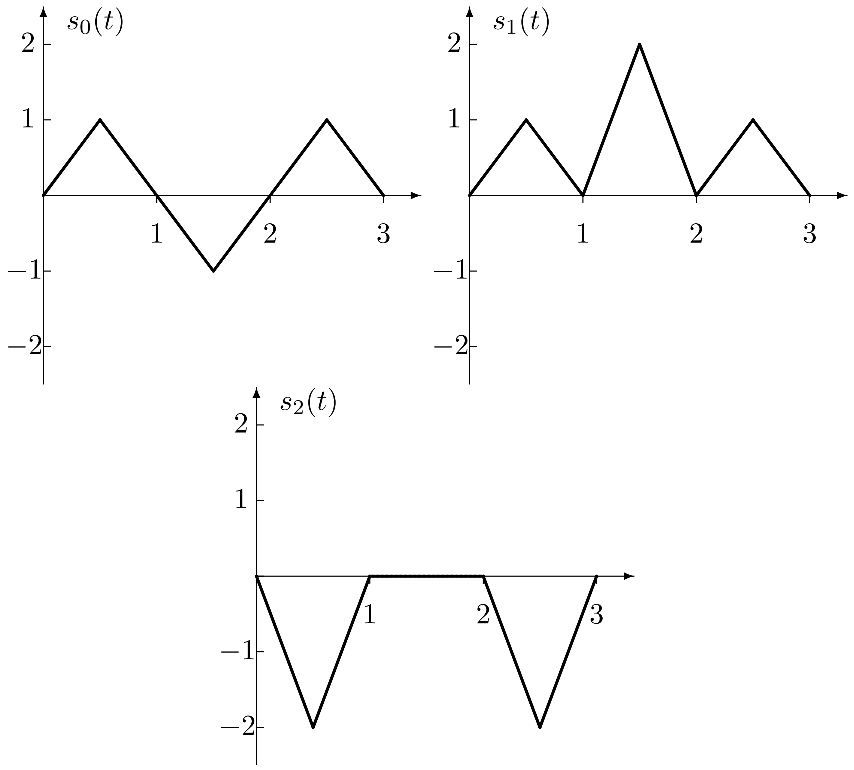


Figura 3.3: Señales Ejercicio 3.5.

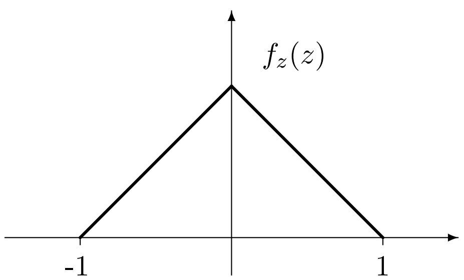


Figura 3.4: Constelación y función densidad de probabilidad del término de ruido para el Ejercicio 3.6.

a) Obtenga la expresión analítica de la función densidad de probabilidad de la observación condicionada a la transmisión de cada símbolo (es decir, $f_{q|A}(q|a_i)$, para todo i).

b) Diseñe el decisor óptimo para símbolos equiprobables.

c) Calcule la probabilidad de error para el decisor anterior.

d) Diseñe el decisor óptimo para las siguientes probabilidades de símbolo: $p_A(a_0) = p_A(a_3) = 1/6$, $p_A(a_1) = p_A(a_2) = 1/3$.

e) Calcule la probabilidad de error para el decisor anterior.

Ejercicio 3.7 Un sistema de comunicaciones binario utiliza las siguientes señales para la transmisión de los dos símbolos:

$$s_0(t) = -s_1(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

El receptor se implementa como se muestra en la Figura 3.5 (representación para la recepción del primer símbolo de la secuencia).

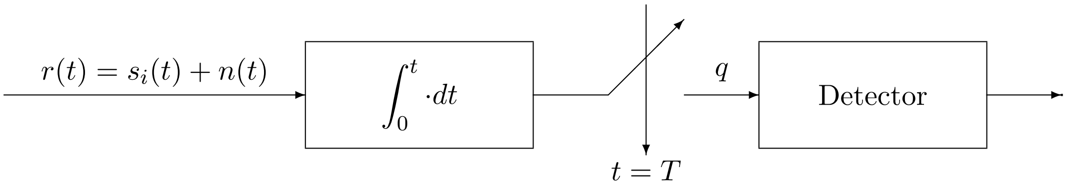


Figura 3.5: Receptor para el Ejercicio 3.7.

Determine la relación señal a ruido a la salida del demodulador (en q), suponiendo que el ruido aditivo es de media nula, gausiano y con densidad espectral de potencia $N_0/2$ W/Hz.

Ejercicio 3.8 El código de línea de Mánchester utiliza las señales de la Figura 3.6 para transmitir los dos símbolos del código.

a) Determine la probabilidad de error si ambos símbolos se transmiten con igual probabilidad.

b) Determine la probabilidad de error si la probabilidad de los símbolos es $p_A(a_0) = p$ y $p_A(a_1) = 1 - p$.

Ejercicio 3.9 Considere un sistema digital de comunicaciones que transmite la información empleando una constelación QAM a una tasa de símbolo de 2400 baudios (símbolos/s). Se asume ruido aditivo blanco y gausiano.

a) Determine la relación E_b/N_0 requerida para conseguir una probabilidad de error de símbolo aproximada de 10^{-5} para una tasa binaria de 4800 bits/s.

b) Repita el cálculo para una tasa binaria de 9600 bits/s.

c) Repita el cálculo para una tasa binaria de 19200 bits/s.

d) Exponga las conclusiones obtenidas a partir de estos resultados.

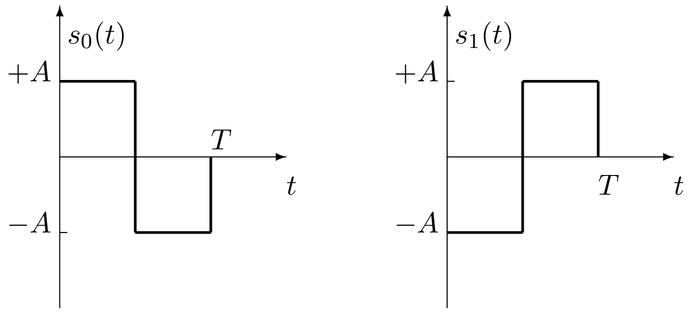


Figura 3.6: Señales para el Ejercicio 3.8.

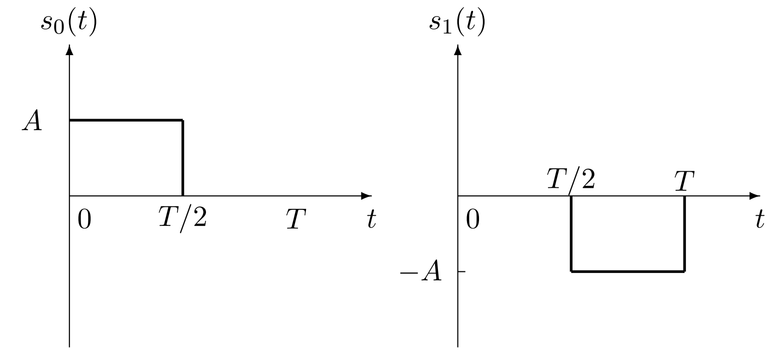


Figura 3.7: Señales para el Ejercicio 3.10.

Ejercicio 3.10 Un sistema de comunicaciones transmite dos símbolos mediante las señales $s_0(t)$ y $s_1(t)$ que se muestran a continuación en la Figura 3.7

a) Se tiene un canal aditivo gausiano (ruido blanco con densidad espectral de potencia $N_0/2$). Dibuje la constelación, diseñe el receptor (demodulador + decisor) óptimo, y calcule la probabilidad de error.

b) Si el canal es tal que su salida a una entrada $s(t)$ es $\alpha s(t) + \alpha A$, de nuevo con el mismo tipo de ruido aditivo, rediseñe el decisor óptimo y calcule la probabilidad de error.

c) Si en la situación del apartado a) se utiliza el demodulador de la Figura 3.8, diseñe el decisor óptimo y calcule la probabilidad de error en este caso. Comente los resultados comparándolos con los obtenidos en el apartado a).

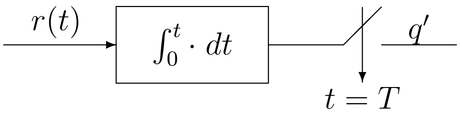


Figura 3.8: Demodulador para el Ejercicio 3.10 (representación para la demodulación del primer símbolo).

NOTA: Tenga en cuenta que si no se emplea un demodulador normalizado, la varianza de ruido discreto ya no es $N_0/2$.

Ejercicio 3.11 Las cuatro señales de la Figura 3.9 se utilizan para transmitir 4 símbolos igualmente probables en un sistema de comunicaciones. Se considera que dichas señales se transmiten a través de un canal gausiano con densidad espectral de potencia $N_0/2$.

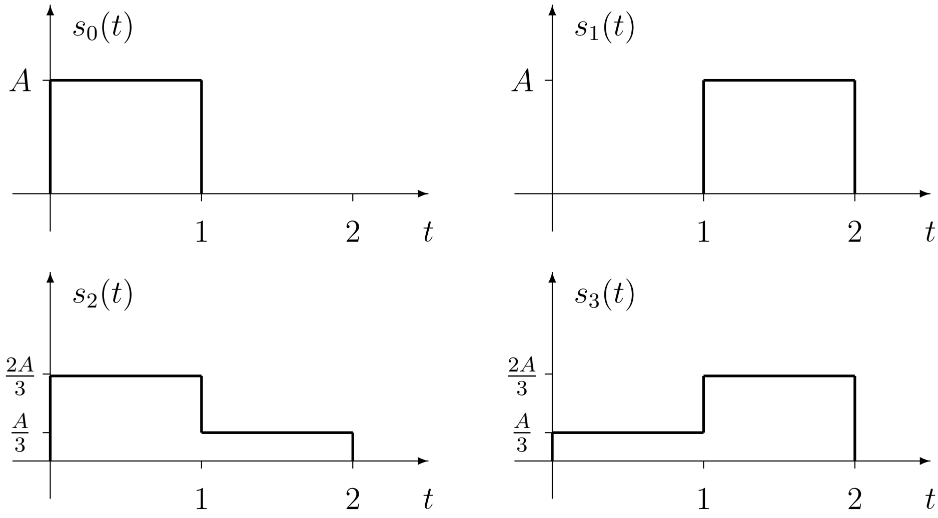


Figura 3.9: Señales para el Ejercicio 3.11.

a) Diseñe el transmisor: codificador (constelación) y modulador ($\{\phi_i(t)\}$, $i = 0, 1, \cdots, N$).

b) Calcule la energía media por símbolo del sistema, y realice una asignación óptima de bits a cada símbolo justificando dicha asignación (sin la justificación adecuada, la asignación no será valorada).

c) Diseñe el receptor óptimo (demodulador + decisor) utilizando filtros adaptados causales (hay que proporcionar la expresión analítica o dibujarlos), obtenga las expresiones de la función densidad de probabilidad de la observación a la salida del demodulador condicionada a la transmisión de cada símbolo ($f_{\boldsymbol{q}|\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{q}|\boldsymbol{a}_i)$, $i = 0, 1, 2, 3$), y calcule la probabilidad de error.

d) Si se utiliza el demodulador de la Figura 3.10, diseñe el decisor óptimo, obtenga las expresiones de la función densidad de probabilidad de la observación a la salida del demodulador condicionada a la transmisión de cada símbolo ($f_{\boldsymbol{q}|\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{q}|\boldsymbol{a}_i)$, $i = 0, 1, 2, 3$), y calcule la probabilidad de error. Compare este valor con el obtenido en el apartado anterior y explique los resultados obtenidos.

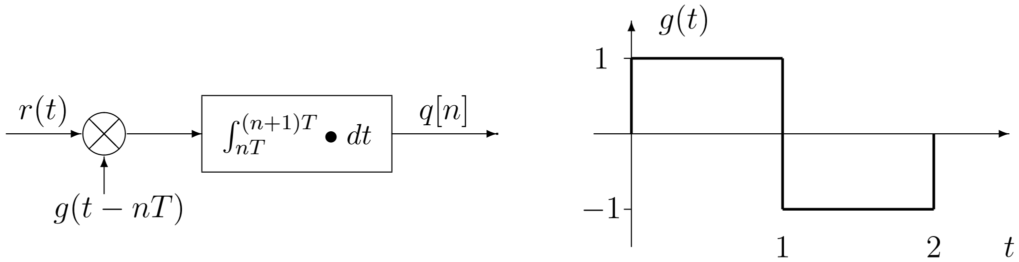


Figura 3.10: Demodulador para el Ejercicio 3.11.

Ejercicio 3.12 Se tiene un sistema de comunicaciones con un transmisor con una tasa de símbolo $R_s = 10^3$ baudios. Se asume ruido aditivo blanco, gausiano, y densidad espectral de potencia $N_0/2$, con $N_0 = 2 \times 10^{-2}$.

a) Una aproximación comúnmente empleada en sistemas de comunicaciones digitales para la probabilidad de error de símbolo es

$$P_e \approx k \cdot Q\left(\frac{d_{min}}{2\sqrt{N_o/2}}\right), \tag{3.1}$$

donde d_{min} es la mínima distancia entre dos puntos de la constelación y k es el máximo número de símbolos que se encuentran a d_{min} de un símbolo de la constelación.

I) Utilizando la aproximación (3.1), diseñe el codificador unidimensional óptimo del sistema de comunicaciones, con la menor energía media por símbolo, para obtener una probabilidad de error de símbolo aproximada $P_e \approx 2 \cdot 10^{-4}$ transmitiendo a una velocidad binaria $R_b = 2 \times 10^3$ bits/s.

II) Realice una asignación óptima de bits a cada símbolo, explicando la razón de dicha asignación, y calcule la tasa de error binaria aproximada.

b) Si el sistema de comunicaciones utiliza el codificador y el modulador definidos en la Figura 3.11:

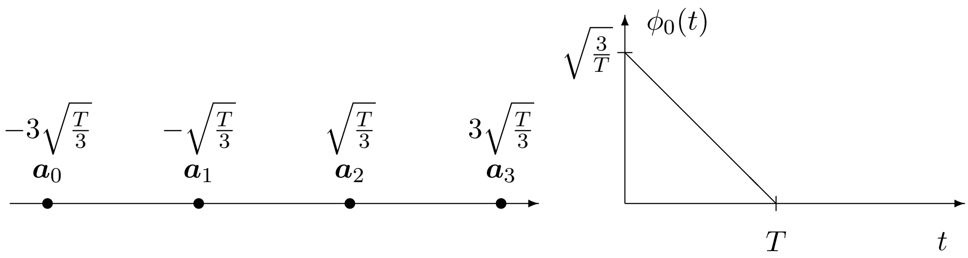


Figura 3.11: Codificador y modulador para el Ejercicio 3.12.

I) Diseñe el demodulador óptimo utilizando un correlador y utilizando un filtro adaptado causal (en este último caso proporcione la expresión analítica de la respuesta al impulso del filtro o bien dibújela).

II) Si por simplicidad, en lugar del demodulador óptimo se emplea un demodulador que realiza la siguiente operación sobre la señal recibida ($r(t)$)

$$q[n] = 2\int_{nT}^{(n+1)T} r(t)\, dt,$$

diseñe el decisor óptimo y calcule la probabilidad de error de símbolo asumiendo símbolos equiprobables. Discuta si esta probabilidad de error será mayor o menor que la obtenida con el demodulador del apartado anterior.

Ejercicio 3.13 Se va a diseñar un sistema de comunicaciones que utilizará las ocho señales de la Figura 3.12 para transmitir ocho símbolos con igual probabilidad. El canal únicamente introduce ruido, que se considerará blanco, gausiano, estacionario y con densidad espectral de potencia $N_0/2$. Por simplicidad en los cálculos, considere $T = 2$.

a) Realice la asignación de los bits que transporta cada una de las señales para obtener la mínima probabilidad de error de bit, y justifique la razón para elegir dicha asignación.

b) Obtenga otras 8 señales alternativas (dibuje las ocho señales o proporcione sus expresiones analíticas) con las que se pueda obtener la misma probabilidad de error que con el conjunto original, pero que requieran una mínima energía media por símbolo, y calcule esa energía media por símbolo mínima.

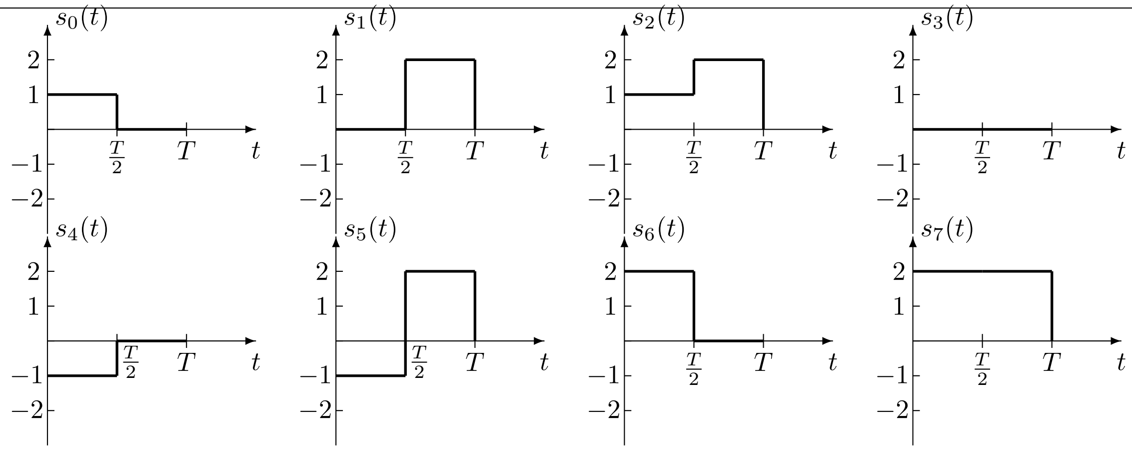


Figura 3.12: Señales para el Ejercicio 3.13.

c) Diseñe el receptor óptimo (demodulador + decisor), y calcule la probabilidad de error obtenida (puede hacerlo utilizando tanto el conjunto original de señales como el obtenido en la sección b), ya que en ambos casos la probabilidad de error ha de ser la misma).

Ejercicio 3.14 Un sistema de comunicaciones utiliza una constelación formada por los siguientes 4 símbolos,

$$\boldsymbol{a}_0 = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

que se transmiten con igual probabilidad, y un modulador dado por las funciones base de la Figura 3.13.

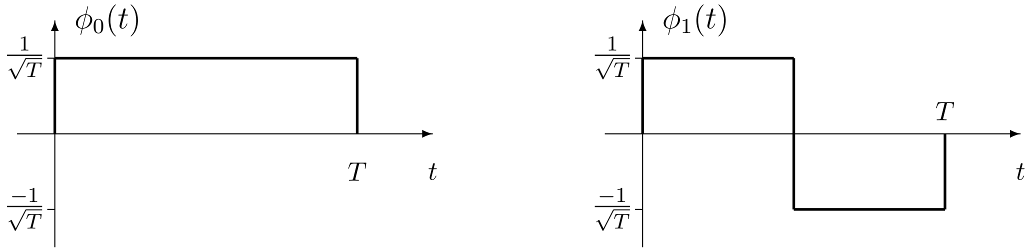


Figura 3.13: Demodulador para el Ejercicio 3.14.

Por simplicidad en los cálculos, en lo sucesivo considere $T = 1$. Considere también la transmisión sobre un canal gausiano con densidad espectral de potencia de ruido blanco $N_0/2$.

a) Realice la asignación binaria que minimiza la probabilidad de error de bit, justificando dicha asignación (sin la justificación adecuada, la asignación no será valorada), y calcule la velocidad de transmisión de símbolos, R_s, y la velocidad de transmisión binaria, R_b.

b) Represente las cuatro señales utilizadas para la transmisión de cada símbolo, $s_i(t)$, $i = \{0, 1, 2, 3\}$, y la señal resultante de la transmisión de la siguiente secuencia de símbolos

$$\boldsymbol{A}[0] = \boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{A}[1] = \boldsymbol{a}_0,\ \boldsymbol{A}[2] = \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{A}[3] = \boldsymbol{a}_0,\ \boldsymbol{A}[4] = \boldsymbol{a}_2.$$

c) Diseñe el receptor óptimo (demodulador + decisor), y calcule la probabilidad de error obtenida con este receptor.

d) Si en lugar del demodulador óptimo se utiliza el demodulador de la Figura 3.14, diseñe el decisor óptimo para ese demodulador y calcule la probabilidad de error resultante.

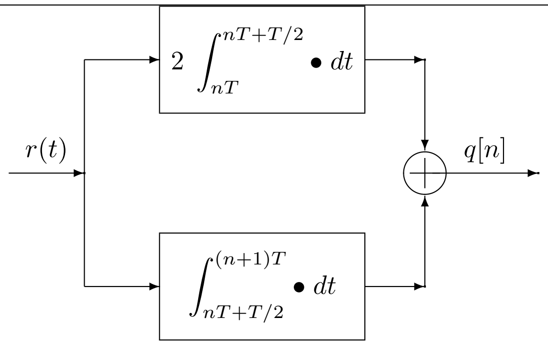
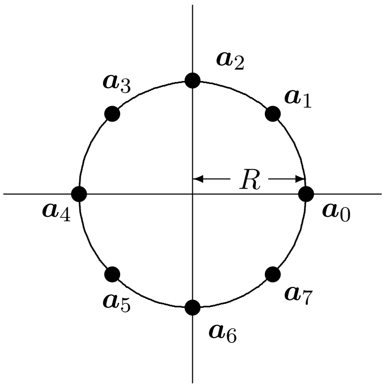


Figura 3.14: Demodulador para el Ejercicio 3.14.

Ejercicio 3.15 Un sistema digital de comunicaciones usa una constelación de 8 símbolos equiprobables como la que se muestra en la figura. Se supone que el ruido asociado a la transmisión se modela como un proceso de ruido térmico habitual, estacionario, blanco, gausiano y con densidad espectral de potencia $S_n(j\omega) = \frac{N_0}{2}$, siendo $N_0 = 0{,}03$ para este caso.



a) Si se desea que la probabilidad de error de símbolo sea aproximadamente $P_e \approx 2 \times 10^{-6}$:

   I) determine el valor del radio R requerido;

   II) calcule la energía media por símbolo, E_s, de la constelación resultante;

   III) realice la asignación binaria óptima justificándola (sin justificación no se considerará válida), y estime la tasa de error de bit (BER) aproximada usando dicha asignación si se asume que la relación señal a ruido es alta.

b) Si se desea transmitir a una tasa binaria $R_b = 1500$ bits por segundo a través de un canal en banda base (inicialmente sin limitación en el ancho de banda):

   I) elija una base ortonormal apropiada para la transmisión justificando su elección (debe proporcionar las expresiones analíticas de cada elemento de la base o un dibujo de la misma, pero en cualquier caso han de estar claramente indicados los valores numéricos de amplitudes y duración de las señales, T seg.);

   II) diseñe un demodulador óptimo para el sistema de comunicaciones.

c) En cuanto al decisor

   I) diseñe el decisor óptimo para el sistema;

   II) calcule la cota de la unión (sin despreciar ningún término ni hacer ninguna aproximación);

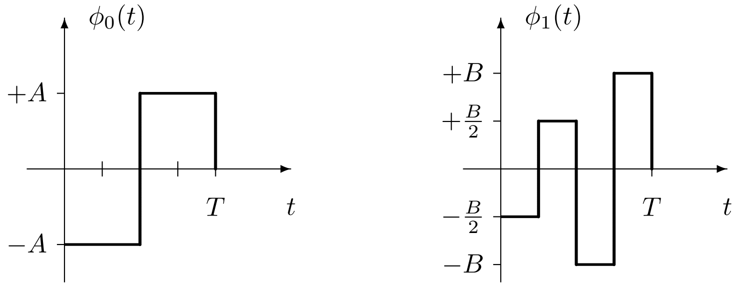
iii) obtenga la cota holgada y escriba la cota resultante para la probabilidad de error en función del cociente o relación $\frac{E_s}{N_0}$.

NOTA: la distancia entre dos puntos de una circunferencia de radio R está dada por $d = 2R\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$, donde θ es el ángulo que forman los radios que unen dichos puntos con el centro.

Ejercicio 3.16 Un sistema de comunicaciones utiliza una constelación formada por los siguientes 4 símbolos,

$$\boldsymbol{a}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

que se transmiten con igual probabilidad, y un modulador dado por las funciones base de la figura



Por simplicidad en los cálculos, en lo sucesivo considere $T = 1$. Considere también la transmisión sobre un canal gausiano con densidad espectral de potencia de ruido blanco $N_0/2$.

a) Determine los valores de A y B, demuestre que las funciones forman una base ortonormal, y calcule la velocidad de transmisión o tasa de símbolo y la velocidad de transmisión o tasa de bit.

b) Represente las señales $s_i(t)$ asociadas a la transmisión de cada símbolo $\boldsymbol{a}_i$, y el fragmento de la señal resultante de la transmisión de los siguientes primeros 5 símbolos de la secuencia

$$\boldsymbol{A}[0] = \boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{A}[1] = \boldsymbol{a}_0,\ \boldsymbol{A}[2] = \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{A}[3] = \boldsymbol{a}_0,\ \boldsymbol{A}[4] = \boldsymbol{a}_2.$$

c) Realice la asignación binaria para cada símbolo, justificando dicha asignación (sin esta justificación no se considerará la asignación como válida), y calcule la energía media por símbolo del sistema. ¿Es la constelación utilizada la más apropiada en términos del compromiso entre uso de energía y prestaciones (explique claramente por qué sí o por qué no)?

d) Diseñe el demodulador óptimo, el decisor óptimo, y calcule la probabilidad de error de símbolo exacta del sistema.

e) Obtenga la aproximación de la probabilidad de error de símbolo y acote dicha probabilidad de error mediante la cota de la unión y mediante la cota holgada.

Ejercicio 3.17 Un sistema de comunicaciones utiliza la siguiente constelación de 4 símbolos equiprobables

$$\boldsymbol{a}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

a) Para un sistema que utilice la constelación especificada

I) Realize la asignación binaria con el objetivo de tener la mínima probabilidad de error binaria, explicando por qué utilizar esa asignación, y no otra, implica minimizar la probabilidad de error (sin esta explicación, la respuesta no será considerada como válida).

II) Obtenga la energía media por símbolo y discuta si se trata de una constelación con un buen compromiso entre prestaciones y uso de energía.

b) Suponga para este apartado que se quiere transmitir a través de un canal paso bajo (transmisión en banda base) con ruido aditivo térmico (con el modelo estadístico habitual). En ese caso

I) Diseñe un modulador adecuado para ese tipo de canal, explicando la razón de la elección.

II) Represente la señal $s_2(t)$ asociada al símbolo $\boldsymbol{a}_2$ si se utiliza ese modulador.

III) Diseñe un demodulador óptimo si se utiliza ese modulador.

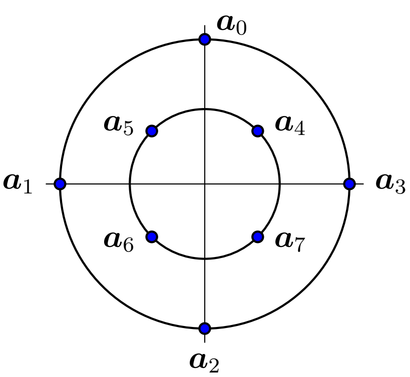
IV) Diseñe el decisor óptimo (de mínima probabilidad de error de símbolo).

c) Suponiendo que con el modulador elegido en el apartado anterior se tiene una perfecta adaptación al canal, o lo que es lo mismo, que se transmite a través de un canal gausiano con densidad espectral de potencia $N_0/2$, siendo en este caso $N_0 = 0{,}02$.

I) Calcule la aproximación habitual de la probabilidad de error de símbolo, la aproximación de la probabilidad de error de bit si se utiliza la asignación binaria del primer apartado, y la expresión de la cota holgada, indicando claramente el valor numérico de todos los términos que aparezcan en la expresión.

II) Calcule la probabilidad de error de símbolo exacta, y exprésela como una función de la relación E_s/N_0.

Ejercicio 3.18 Un sistema de comunicaciones que transmite a una tasa de símbolo $R_s = 4$ Mbaudios utiliza la constelación de 8 símbolos que se muestra en la figura, y que se denomina 8-QAM circular. En este caso $A = 1 + \sqrt{3}$ y $B = 1$, y los 8 símbolos se transmiten con igual probabilidad.



$$\boldsymbol{a}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ +A \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} +B \\ +B \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} -A \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{a}_5 = \begin{bmatrix} -B \\ +B \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -A \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{a}_6 = \begin{bmatrix} -B \\ -B \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} +A \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{a}_7 = \begin{bmatrix} +B \\ -B \end{bmatrix}$$

El modulador, para una tranmisión banda base, está definido por

$$\phi_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}}, & \text{si } 0 \leq t < T \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad \phi_1(t) = \begin{cases} +\frac{1}{\sqrt{T}}, & \text{si } 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{T}}, & \text{si } \frac{T}{2} \leq t < T \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

a) Para este sistema

I) Calcule la velocidad de transmisión binaria y la energía media por símbolo del sistema.

II) Diseñe el demodulador y el decisor óptimos. Para el demodulador, utilice filtros adaptados causales, y dibuje el diagrama de bloques del demodulador y la respuesta de los filtros causales.

III) Calcule la cota de la unión y la aproximación habitual de la probabilidad de error.

b) Temporalmente se produce un error en el funcionamiento del demodulador, de forma que no puede obtener la segunda coordenada de la representación vectorial de la señal recibida, y sólo dispone de la primera (es decir, del vector $\boldsymbol{q}[n] = \begin{bmatrix} q_0[n] \\ q_1[n] \end{bmatrix}$ sólo se dispone de $q_0[n]$. Mientras se resuelve el problema, el usuario decide no enviar los 8 símbolos, sino sólo 4, con el coste de perder tasa de transmisión binaria, pero con el objetivo de tener una mejor probabilidad de error.

I) Elija el subconjunto de 4 símbolos que transmitiría si se quieren obtener las mejores prestaciones teniendo en cuenta el problema del demodulador.

II) Diseñe el decisor que utilizaría en ese caso.

III) Calcule la probabilidad de error exacta que tendría el sistema en ese caso.

Ejercicio 3.19 Un sistema de comunicaciones puede elegir entre tres conjuntos de señales distintos para transmitir la información. Las constelaciones asociadas a cada uno de los conjuntos de señales se detallan en la siguiente tabla.

Constelación A	Constelación B	Constelación C	
$\mathbf{a}_0 = [-1]$ $\mathbf{a}_1 = [1]$ $\mathbf{a}_2 = [3]$	$\mathbf{a}_0 = [-1 \quad -1 \quad -1]$ $\mathbf{a}_1 = [0 \quad 0 \quad 0]$ $\mathbf{a}_2 = [1 \quad 1 \quad 1]$	$\mathbf{a}_0 = [0 \quad 0]$ $\mathbf{a}_1 = [1 \quad 0]$ $\mathbf{a}_2 = [1 \quad 1]$ $\mathbf{a}_3 = [0 \quad 1]$ $\mathbf{a}_4 = [-1 \quad 1]$	$\mathbf{a}_5 = [-1 \quad 0]$ $\mathbf{a}_6 = [-1 \quad -1]$ $\mathbf{a}_7 = [0 \quad -1]$ $\mathbf{a}_8 = [1 \quad -1]$

Los símbolos de la Constelación B y C son equiprobables. Los símbolos de la Constelación A tienen la siguiente distribución de probabilidades $P(\mathbf{a}_0) = 0{,}3$, $P(\mathbf{a}_1) = 0{,}3$, $P(\mathbf{a}_2) = 0{,}4$. La transmisión se realiza por un canal con ruido aditivo y Gausiano de densidad espectral de potencia $N_0/2 = 1$.

a) Identifique en cada caso el número de señales que se transmitirán así como la dimensión de las mismas.

b) Obtenga la energía media para la Constelación A, Constelación B y Constelación C.

c) Dibuje para la Constelación A el conjunto de señales que se transmitirían si la base es un seno de periodo $T/2$, de duración T y normalizado en amplitud para que su energía sea 1.

d) Diseñe el demodulador óptimo para la Constelación C, asumiendo los elementos de la base conocidos para esta constelación.

e) Obtenga las regiones de decisión para las Constelaciones A y C.

f) Obtenga la probabilidad de error para las Constelaciones A y B. No utilice aproximaciones ni cotas.

Ejercicio 3.20 Un sistema de comunicaciones transmite $M = 8$ señales equiprobables en el intervalo de tiempo $(0, T)$ por un canal AWGN con d.e.p $\frac{N_0}{2} = 1$:

$$s_0 = -3\sqrt{\tfrac{2}{T}}\cos\left(\tfrac{2\pi t}{T}\right) \quad s_1 = -\sqrt{\tfrac{2}{T}}\cos\left(\tfrac{2\pi t}{T}\right) \quad s_2 = \sqrt{\tfrac{2}{T}}\cos\left(\tfrac{2\pi t}{T}\right) \quad s_3 = 3\sqrt{\tfrac{2}{T}}\cos\left(\tfrac{2\pi t}{T}\right)$$
$$s_4 = -3\sqrt{\tfrac{2}{T}}\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{2\pi t}{T}\right) \quad s_5 = -\sqrt{\tfrac{2}{T}}\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{2\pi t}{T}\right) \quad s_6 = \sqrt{\tfrac{2}{T}}\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{2\pi t}{T}\right) \quad s_7 = 3\sqrt{\tfrac{2}{T}}\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{2\pi t}{T}\right)$$

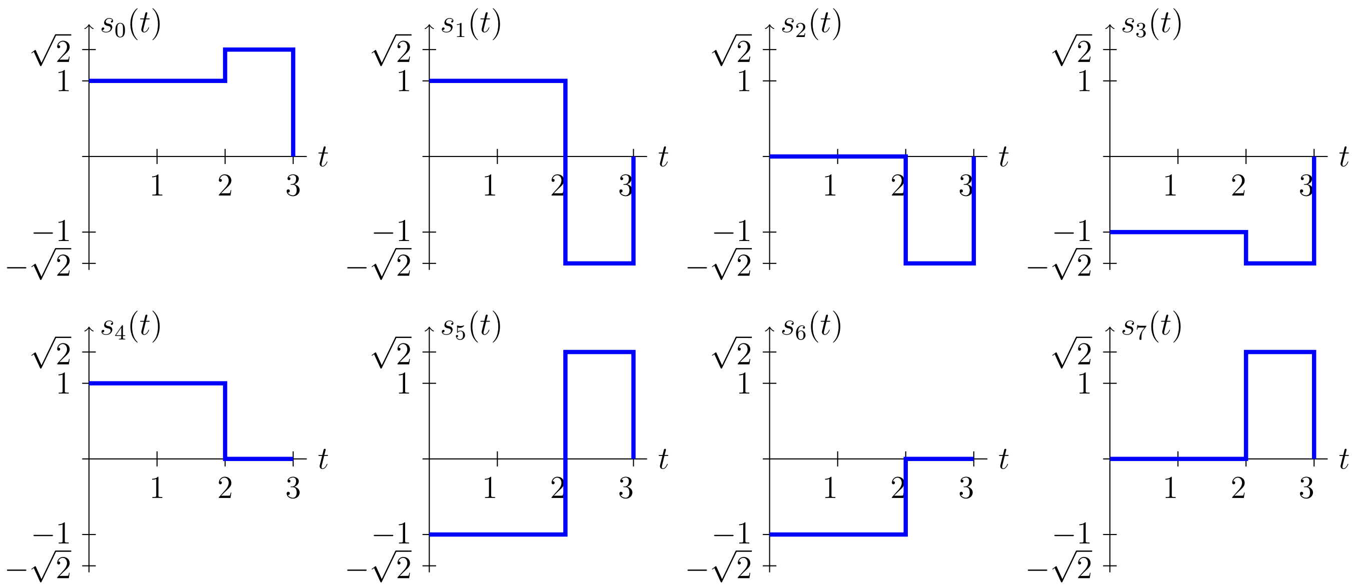
a) Obtenga una base generadora del conjunto de señales. Dibuje la constelación.

b) Obtenga la distancia entre símbolos y la energía media de la constelación.

c) Dibuje las regiones de decisión.

d) Obtenga la probabilidad de error utilizando la cota de la unión.

Ejercicio 3.21 Un sistema de comunicaciones utiliza $M = 8$ señales de forma equiprobable para transmitir la información según la siguiente figura.



El conjunto de señales se transmite por un canal AWGN con densidad espectral de potencia $\frac{N_o}{2} = 1$.

a) Obtenga, aplicando el procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt, la base de dimensión mínima. Obtenga también la constelación.

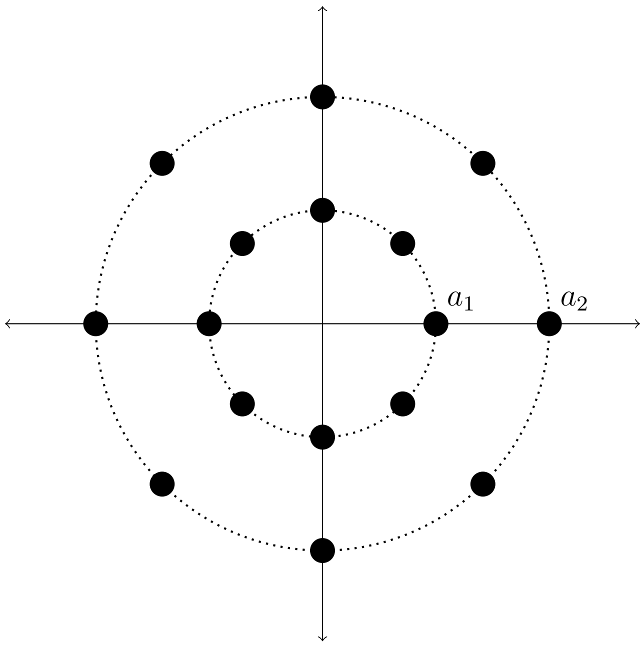
b) Obtenga la energía media de la constelación y la distancia entre señales.

c) Diseñe el demodulador óptimo y las regiones de decisión óptimas.

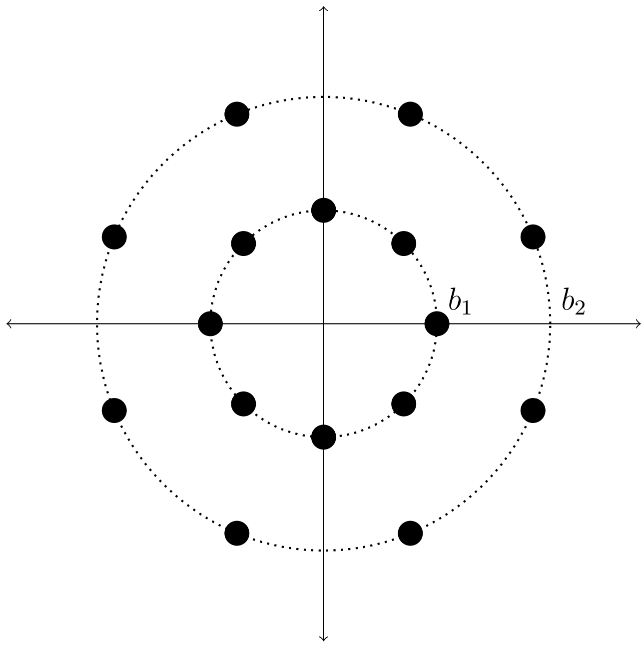
d) Obtenga la probabilidad de error del sistema según el procedimiento que considere más adecuado para la constelación transmitida.

e) Si a la salida del demodulador óptimo hemos recibido $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0{,}9 \\ 0{,}1 \end{bmatrix}$, obtenga el símbolo que con más probabilidad se transmitió.

Ejercicio 3.22 Un sistema de comunicaciones puede utilizar una de las dos constelaciones con símbolos equiprobables que se presentan en la siguiente figura.



Constelación A



Constelación B

El conjunto de señales se transmite por un canal AWGN con densidad espectral de potencia $\frac{N_o}{2} = 1$.

a) Obtenga, para cada una de las constelaciones el número de símbolos y la dimensión del conjunto de señales.

b) Ponga dos ejemplos de base que puedan ser utilizadas por la Constelación B para generar las señales que se transmitan por el canal.

c) Obtenga la energía media de cada una de las constelaciones. Obtenga la relación entre los valores de los radios $\{a_1, a_2\}$ y $\{b_1, b_2\}$ para los cuales ambas constelaciones tienen la misma energía.

d) Para la Constelación A, obtenga la distancia mínima[1] si $a_2 = 2a_1$.

e) Diseñe el demodulador óptimo y las regiones de decisión óptimas para las dos constelaciones.

Ejercicio 3.23 En un sistema de comunicaciones digital los elementos de la base generadora y ortogonal $\{\phi_1(t), \phi_2(t)\}$ generan el conjunto de símbolos:

$$\begin{aligned}
s_1(t) &= \phi_1(t) + \phi_2(t)\\
s_2(t) &= -\phi_1(t) - \phi_2(t)\\
s_3(t) &= 3\phi_1(t) + 3\phi_2(t)\\
s_4(t) &= -3\phi_1(t) - 3\phi_2(t)
\end{aligned}$$

con la siguiente distribución de probabilidades:

$$P(\mathbf{a}_1 = 0{,}1) \quad P(\mathbf{a}_2 = 0{,}2) \quad P(\mathbf{a}_3 = 0{,}2) \quad P(\mathbf{a}_4 = 0{,}5)$$

[1] La distancia d entre dos puntos dentro de una circunferencia de radio R y formando un ángulo θ, viene dada por $d = 2R \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$.

Los símbolos se transmiten por un canal con ruido aditivo, blanco y Gausiano con $N_0/2 = 1$.

a) Identifique el número de símbolos M y la dimensión de la base generadora N

b) Calcule la constelación, la energía media de la misma y la distancia entre símbolos.

c) Compare la energía anterior con la energía de la misma constelación, donde los símbolos son equiprobables. Identifique qué constelación es la más eficiente desde el punto de vista de energía (menor gasto de energía).

d) Diseñe el demodulador óptimo.

e) Obtenga las regiones de decisión.

f) Calcule la probabilidad de error de forma exacta, no utilice cotas.