

3.6. Soluciones de los ejercicios

Ejercicio 3.1 Solución

a) Las modulaciones y frecuencia de portadora son

- Figura (a): modulación AM convencional, con frecuencia de portadora $f_c = 100$ kHz.
- Figura (b): modulación de doble banda lateral, con frecuencia de portadora $f_c = 102$ kHz.
- Figura (c): modulación AM de banda lateral única. Aquí hay dos posibilidades
 - Banda lateral superior con frecuencia de portadora $f_c = 98$ kHz.
 - Banda lateral inferior con frecuencia de portadora $f_c = 102$ kHz.
- Figura (d): modulación angular, con frecuencia de portadora $f_c = 100$ kHz.

b) La señal moduladora es una senoide de frecuencia 2 kHz, es decir

$$m(t) = A_c \cos(\omega_c t + \phi)$$

con $\omega_c = 2\pi f_c$ y $f_c = 2$ kHz.

Ejercicio 3.2 Solución

El espectro de la señal modulada son deltas en las frecuencias

$$\omega_c + m \times \omega_m$$

para todo m entero, donde ω_c es la frecuencia de la portadora y ω_m es la frecuencia de la señal moduladora (en ambos casos son frecuencias angulares en rad/s). En este caso $\omega_c = 2\pi f_c$ y $\omega_m = 2\pi f_m$. La amplitud de cada delta se π veces el coeficiente $J_m(\beta)$, en este caso $J_m(5)$. Teniendo en cuenta que

$$J_0(5) = -0,18, J_1(5) = -0,32, J_2(5) = 0,05$$

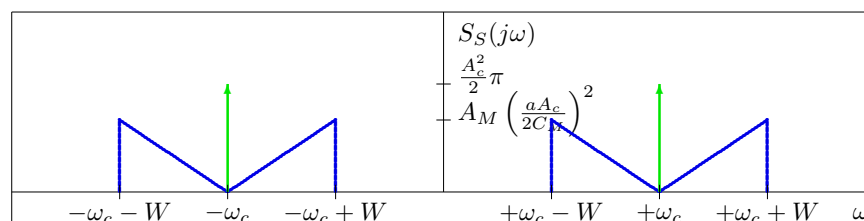
$$J_3(5) = 0,37, J_4(5) = 0,39, J_5(5) = 0,26, \dots$$

y que $J_{-m}(\beta) = (-1)^m J_m(\beta)$, la transformada de Fourier de la señal modulada tendrá la forma de la Figura 3.50 (se representan sólo las 11 frecuencias centrales, para el resto, se seguiría el mismo procedimiento).

Ejercicio 3.3 Solución

En este caso se define para todos los apartados $A_M = 1$.

a) El ancho de banda de $2B$ Hz. La densidad espectral de potencia, para un índice de modulación genérico a , es la de la figura



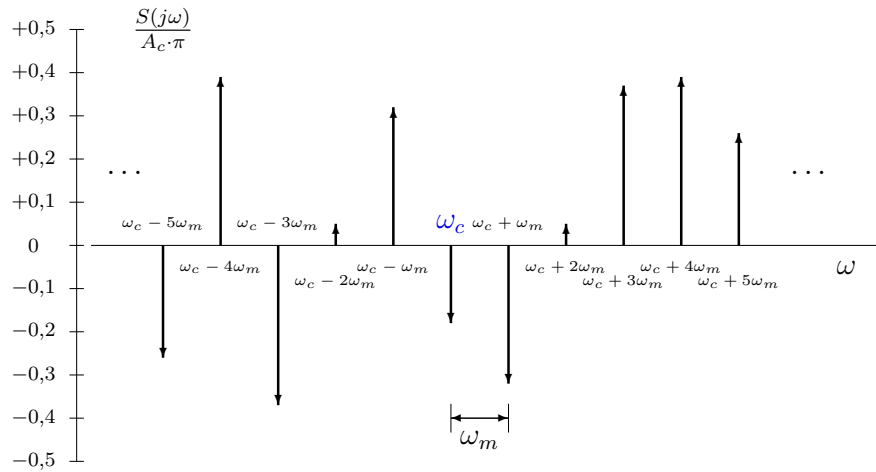
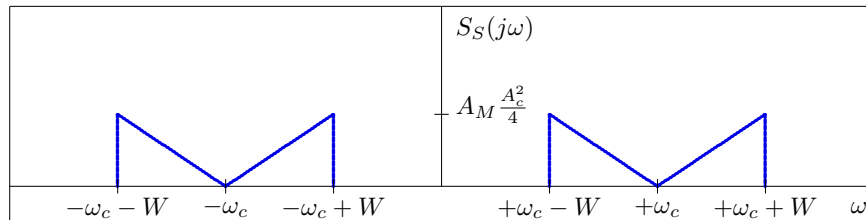
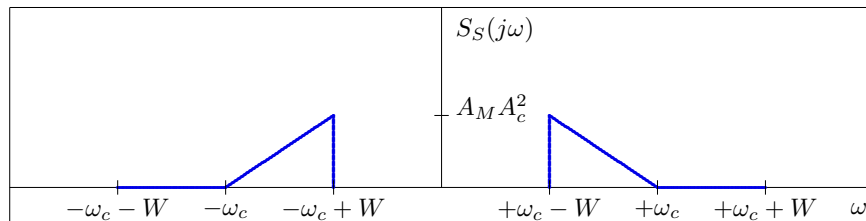


Figura 3.50: Respuesta en frecuencia de la señal modulada para el Ejercicio 3.2.

b) El ancho de banda de $2B$ Hz. La densidad espectral de potencia es la de la figura



c) El ancho de banda de B Hz. La densidad espectral de potencia es la de la figura

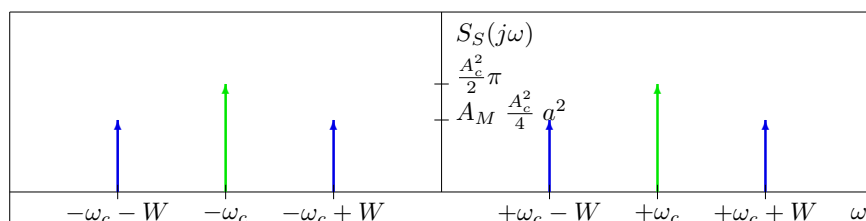


d) El ancho de banda aproximado es $12B$ Hz.

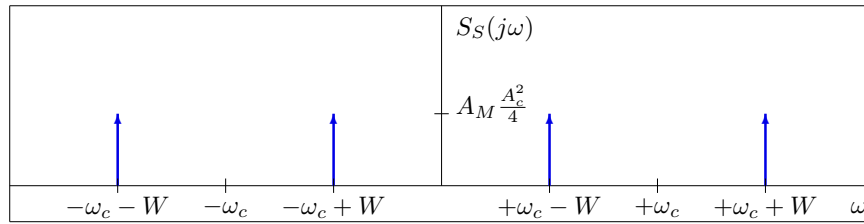
Ejercicio 3.4 Solución

En todos los casos se considera $P_M = \frac{1}{2}$, que es la potencia de la señal moduladora, $C_M = 1$ el el valor máximo en módulo de la señal $m(t)$, y $W = 2\pi f_m$.

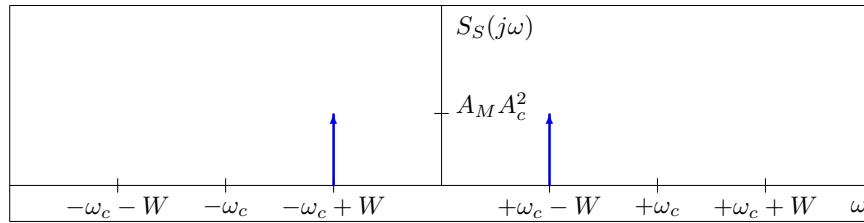
a) La potencia de la señal modulada es $P_S = \frac{A_c^2}{2} [1 + \frac{P_M}{4}]$. La densidad espectral de potencia, para un índice de modulación genérico a , es la de la figura, donde $A_M = \frac{\pi}{2}$



- b) La potencia de la señal modulada es $P_S = \frac{A_c^2}{2} P_M$. La densidad espectral de potencia es la de la figura, donde $A_M = \frac{\pi}{2}$



- c) La potencia de la señal modulada es $P_S = A_c^2 P_M$. La densidad espectral de potencia es la de la figura, donde $A_M = \frac{\pi}{2}$



Ejercicio 3.5 Solución

- a) El ancho de banda es $2B$ Hz, y la relación señal a ruido es peor que la obtenida en una transmisión en banda base

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{AM} = \eta_{AM} \left(\frac{S}{N}\right)_b$$

con

$$\eta_{AM} = \frac{P_{Ma}}{1 + P_{Ma}} = \frac{\frac{a^2}{C_M^2} P_M}{1 + \frac{a^2}{C_M^2} P_M} = \frac{P_M}{\frac{C_M^2}{a^2} + P_M}$$

- b) El ancho de banda es $2B$ Hz, y la relación señal a ruido es igual que la obtenida en una transmisión en banda base

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{DBL} = \eta \left(\frac{S}{N}\right)_b$$

- c) El ancho de banda es B Hz, y la relación señal a ruido es igual que la obtenida en una transmisión en banda base

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{BLU} = \eta \left(\frac{S}{N}\right)_b$$

- d) El ancho de banda es $B + \Delta_B$ Hz, donde Δ_B es el exceso de ancho de banda debido al vestigio, y la relación señal a ruido es ligeramente que la obtenida en una transmisión en banda base

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{BLV} = \eta_{BLV} \left(\frac{S}{N}\right)_b$$

con

$$\eta_{BLV} = \frac{B}{B + \Delta_B}$$

- e) El ancho de banda es aproximadamente $8B$ Hz, y la relación señal a ruido es mejor que la obtenida en una transmisión en banda base, siendo la ganancia proporcional al índice de modulación al cuadrado

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{FM} \approx 3 \frac{P_M}{C_M^2} \beta_f^2 \cdot \left(\frac{S}{N}\right)_b$$

Ejercicio 3.6 Solución

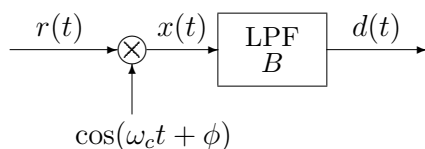
- a) Modulación de amplitud de doble banda lateral (DBL).
- b) Modulación angular de fase (PM).
- c) Modulación de amplitud AM convencional (o doble banda lateral con portadora).
- d) Modulación de banda lateral única (BLU), de banda lateral superior.
- e) Modulación angular de frecuencia (FM).
- f) Modulación de banda lateral única (BLU), de banda lateral inferior.

Ejercicio 3.7 Solución

- a) Modulación de banda lateral única (BLU), de banda lateral inferior.
- b) Modulación de amplitud de doble banda lateral (DBL).
- c) Modulación de amplitud AM convencional (o doble banda lateral con portadora).
- d) Modulación de banda lateral única (BLU), de banda lateral superior.
- e) Modulación angular, de fase (PM) o frecuencia (FM), cuando la señal moduladora es una senoide.
- f) Modulación de amplitud AM convencional (o doble banda lateral con portadora).

Ejercicio 3.8 Solución

- a) Un receptor coherente es un receptor compuesto por un multiplicador por una senoide de la frecuencia de la portadora (a veces denominado demodulador, por su función de devolver el espectro de la señal a banda base) seguido de un filtro paso bajo con el ancho de banda de la señal moduladora, B Hz, tal y como se muestra en la figura

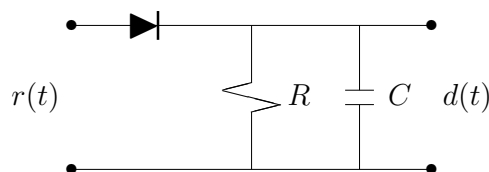


En un receptor coherente, la fase de la portadora en el receptor ha de coincidir con la fase de la portadora que se utilizó en el modulador para generar la señal, $c(t) = A_c \cos(\omega_c t + \phi_c)$, es decir, que debe cumplirse que $\phi = \phi_c$. Normalmente, para lograr esta sincronización de las fases se puede transmitir una señal piloto a la frecuencia y fase de la portadora, o bien se utilizará un lazo enganchado en fase, o PLL, en el receptor.

b) Las variantes de modulaciones AM que requieren un receptor coherente son

- Modulación AM de doble banda lateral (DBL)
- Modulación AM de banda lateral única (BLU)
- Modulación AM de banda lateral vestigial (BLV)

La modulación AM convencional, que también puede hacer uso de un receptor coherente, puede utilizar un receptor más simple, en este caso un detector de envoltura, que se puede implementar con un diodo rectificador y un filtro RC paso bajo, como se muestra en la figura



c) En el caso de la modulación de doble banda lateral, el efecto de tener una fase diferente en las portadoras del transmisor (ϕ_c) y del receptor (ϕ), va a ser que la señal demodulada idealmente (sin ruido ni distorsiones) tendrá la expresión

$$d(t) = \frac{A_c}{2} \cdot m(t) \cdot \cos(\phi_c - \phi),$$

con lo que el desfase entre portadoras generará una atenuación en la señal recibida dependiente de la diferencia de fases. Se puede comprobar, por ejemplo, que un desfase de 90° sería crítico, ya que en este caso se anularía totalmente la señal recibida.

En el caso de la modulación de banda lateral única (y de la de banda lateral vestigial, que es muy similar), el problema es aún mayor, ya que la expresión de la señal a la salida del demodulador es

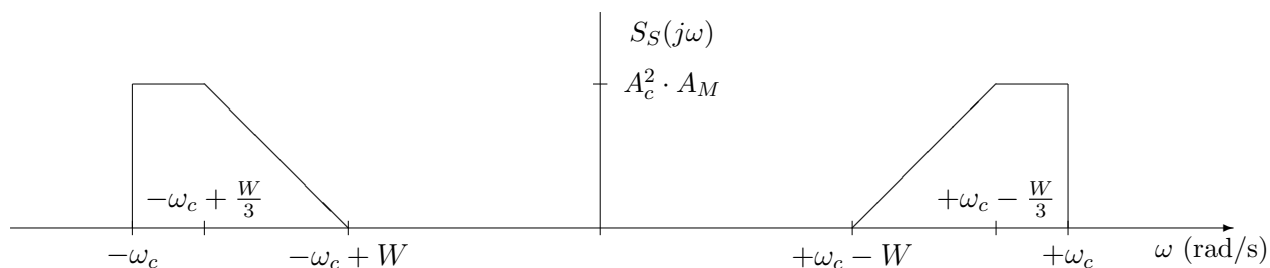
$$d(t) = \frac{A_c}{2} \cdot m(t) \cdot \cos(\phi_c - \phi) \pm \frac{A_c}{2} \cdot \hat{m}(t) \cdot \sin(\phi_c - \phi),$$

con lo que una diferencia de fases no sólo atenuará el término asociado a la señal $m(t)$, sino que hará no nulo el término proporcional a la transformada de Hilbert de la señal moduladora, $\hat{m}(t)$, que es una interferencia sobre la señal deseada $m(t)$.

Ejercicio 3.9 Solución

a)

$$S_S(j\omega) = \begin{cases} 0, & |\omega| > \omega_c \\ A_c^2 \cdot [S_M(j\omega - j\omega_c) + S_M(j\omega + j\omega_c)], & |\omega| < \omega_c \end{cases}$$



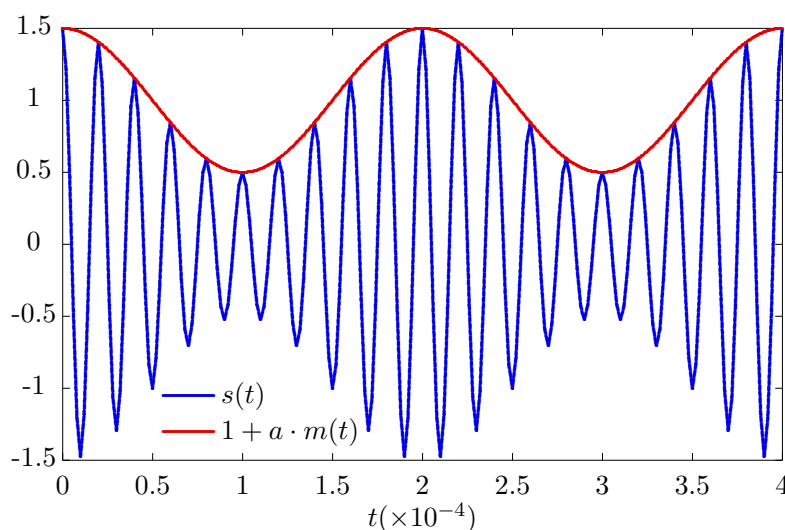
- b) En términos de eficiencia espectral, la modulación BLU es la más eficiente de todas, ya que el ancho de banda requerido para transmitir una señal moduladora de ancho de banda B Hz es B Hz, mientras que tanto la AM convencional como la AM de doble banda lateral requieren el doble de ancho de banda, $2B$ Hz, mientras que la modulación FM requiere un ancho de banda mayor, dependiente del índice de modulación, en concreto, según la regla de Carson, $2(\beta + 1)B$ Hz.

Ejercicio 3.10 Solución

- a) El ancho de banda es

$$BW_{AM} = 2B = 10 \text{ kHz.}$$

La señal modulada en el dominio temporal tendrá la forma



- b) Las modulaciones de amplitud que no incluyen la transmisión de la portadora son

- Modulación de doble banda lateral (DBL).
- Modulación de banda lateral única (BLU).
- Modulación de banda lateral vestigial (BLV).

El ancho de banda de la DBL es igual que el de la AM convencional, mientras que el de la BLU es la mitad, y el de la BLV es aproximadamente la mitad (despreciando el vestigio de la banda lateral eliminada)

$$BW_{DBL} = 2B = 10 \text{ kHz, } BW_{BLU} = B = 5 \text{ kHz, } BW_{BLV} \approx B = 5 \text{ kHz.}$$

- c) El ancho de banda teórico es infinito, ya que la transformada de Fourier se puede escribir como una suma infinita de sinusoides en las frecuencias $\omega_c \pm n \cdot \omega_m$ rad/s. El ancho de banda efectivo es el ancho de banda que contiene el 98 % de la potencia de la señal, y en este caso es

$$BW_{FM} = 2 \cdot (\beta_f + 1) \cdot f_m = 80 \text{ kHz.}$$

- d) La principal ventaja de las modulaciones angulares es su mayor relación señal a ruido (inmunidad frente al ruido), que aumenta respecto a la relación en banda base de forma proporcional al cuadrado del índice de modulación. El principal inconveniente es que el ancho de banda se incrementa de forma proporcional a dos veces el índice de modulación más uno, lo que es sensiblemente superior al requerido por las modulaciones lineales.

Ejercicio 3.11 Solución

- a) Las modulaciones de amplitud se distinguen de las angulares en que en las primeras lo que varía con la señal de información o moduladora es la amplitud de la señal, mientras que en las últimas la amplitud permanece constante, pero se modifica la información angular (frecuencia instantánea o término de fase). Por tanto, las modulaciones de amplitud son las de las figuras B y C. Las expresiones analíticas para la modulación AM convencional y la modulación de doble banda lateral son, respectivamente

$$s_{AM}(t) = [1 + a \times m_a(t)] \times c(t), \quad s_{DBL}(t) = m(t) \times c(t).$$

En la primera, la envolvente de la señal es $[1 + a \times m_a(t)]$, que para $a < 1$, como es el caso, es siempre positiva, mientras que en la segunda, simplemente se multiplica la señal moduladora por la portadora, lo que hace que la señal se invierta respecto a la portadora para valores negativos de $m(t)$. Es trivial ver que

- Señal B: modulación AM convencional
- Señal C: modulación de doble banda lateral.

En cuanto a las modulaciones angulares, las modulaciones PM y FM tienen la siguiente expresión analítica

$$s(t) = A_c \cos(\omega_c t + \phi(t)) \text{ con } \phi(t) = \begin{cases} k_p \times m(t), & \text{para PM} \\ 2\pi k_f \times \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau, & \text{para FM} \end{cases}.$$

Por tanto, el término de fase $\phi(t)$ es proporcional en un caso a la señal moduladora, y en otro caso a su integral. En cualquier caso, cuando $\phi(t)$ toma valores positivos, se incrementa el argumento de la senoide, lo que significa que la señal modulada se “adelanta” respecto a la portadora, mientras que cuando toma valores negativos, se reduce el argumento de la senoide, lo que significa que la señal modulada se “retrarda” respecto de la portadora. Por tanto, en una modulación PM, la señal se adelantará respecto a la portadora para valores positivos de $m(t)$, y se retardará para valores negativos, lo que sucede en la señal A. En una modulación FM, que se adelante o retrase respecto a la portadora está relacionado con el signo de la integral de $m(t)$, lo que sucede en la figura D. Por tanto

- Señal A: modulación PM.
- Señal D: modulación FM.

- b) La modulación más conveniente para cada caso es:

- I) En este caso lo mejor es utilizar una modulación angular con un índice de modulación alto, ya que estas tienen una mejor relación señal a ruido que las modulaciones angulares, relación que es proporcional a β^2 . De entre las dos variantes, para un mismo valor de β (mismo ancho de banda), tiene mejor relación señal a ruido la modulación FM (3 veces la de la PM).
- II) El receptor más simple que se puede utilizar en una modulación analógica es un detector de envolvente, que se puede implementar con un diodo, y un filtro RC. La modulación que puede usar este receptor es la modulación AM convencional. El resto de modulaciones de amplitud debe usar un receptor coherente, y las modulaciones angulares usan receptores más complejos.

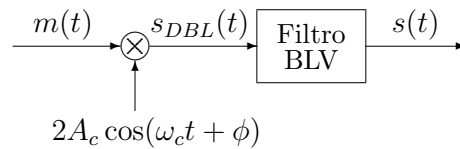
- III) En este caso, se podrán multiplexar más señales cuanto menor sea el ancho de banda de la señal modulada, y la modulación que tiene un menor ancho de banda es la modulación de banda lateral única, que necesita el mismo ancho de banda que la señal moduladora. El resto de modulaciones usa un mayor ancho de banda.

Ejercicio 3.12 Solución

- a) La señal modulada de una modulación AM de banda lateral vestigial se genera de la siguiente forma

- Se genera una señal de doble banda lateral (de amplitud doble, en la notación que se siguió en la asignatura, pero este factor de amplitud no es en realidad relevante) multiplicando la moduladora por la señal portadora.
- Se realizar un filtrado de esta señal de doble banda lateral con un filtro de banda lateral vestigial, un filtro que tiene que cumplir unas ciertas condiciones (siguiente apartado).

La figura muestra el diagrama de bloques de un transmisor de AM de banda lateral vestigial



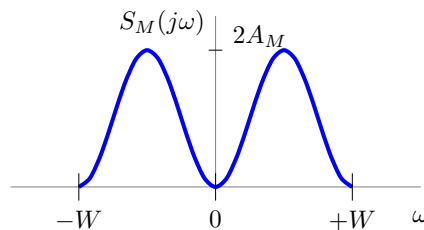
- b) La condición que debe cumplir un filtro de banda lateral vestigial es que su respuesta en frecuencia tenga una simetría impar respecto de la frecuencia de portadora, ω_c , de modo que la contribución de la respuesta del filtro desplazada ω_c a la izquierda más la misma respuesta desplazada ω_c a la derecha (efecto de un demodulador) sea constante en el ancho de banda de la señal

$$|H_{BLV}(j\omega - j\omega_c) + H_{BLV}(j\omega + j\omega_c)| = \text{cte, en } |\omega| \leq W = 2\pi B.$$

El único filtro que cumple la condición es el filtro A. En este caso, se trataría de un filtro para una modulación de banda lateral vestigial de banda lateral superior, ya que se deja pasar la banda de frecuencias por encima de la frecuencia de portadora (más el correspondiente vestigio de la banda lateral inferior).

Ejercicio 3.13 Solución

- a) La densidad espectral de potencia de la señal moduladora es la de la figura



La relación señal a ruido en dB es

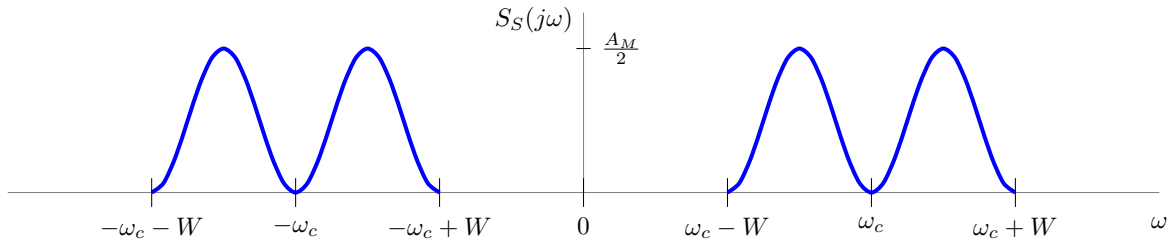
$$\frac{S}{N}(\text{dB}) = 10 \log_{10} \frac{P_X}{P_Z} = 10 \log_{10} \frac{2 \times 10^{-14}}{2 \times 10^{-17}} = 10 \log_{10} 1000 = 30 \text{ dB}$$

b) En el caso de una modulación de doble banda lateral

i) La densidad espectral de potencia para esta modulación es

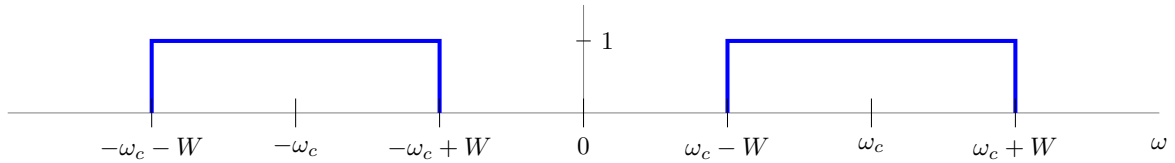
$$S_S(j\omega) = \frac{A_c^2}{4} [S_M(j\omega - j\omega_c) + S_M(j\omega + j\omega_c)],$$

es decir, dos réplicas de la densidad espectral de potencia desplazadas $\pm\omega_c$, con un factor de escala en la amplitud $\frac{A_c^2}{4}$, lo que da lugar a la densidad que se muestra en la figura



El ancho de banda es $2B$ Hz o $2W$ rad/s. En este caso, es de 10 kHz.

ii) El filtro de ruido es un filtro paso banda ideal, de ancho de banda 10 kHz y centrado en la frecuencia de portadora.



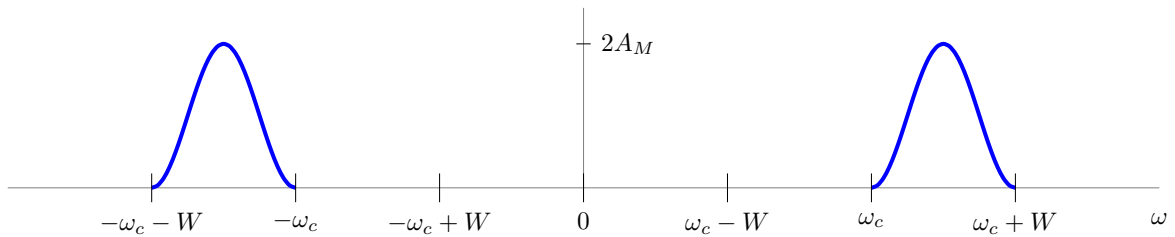
La relación señal a ruido utilizando este tipo de modulación es igual a la obtenida en una transmisión en banda base, que se calculó en el apartado anterior, es decir, 30 dB.

c) En el caso de una modulación de banda lateral única de banda superior

i) La densidad espectral de potencia para esta modulación es

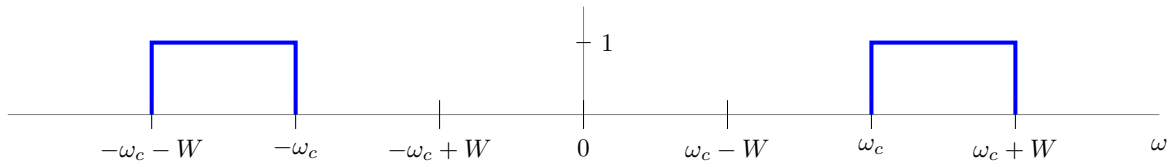
$$S_{S_{sup}}(j\omega) = \begin{cases} A_c^2 [S_M(j\omega - j\omega_c) + S_M(j\omega + j\omega_c)], & |\omega| \geq \omega_c \\ 0, & |\omega| < \omega_c \end{cases}$$

es decir, la parte de la correspondiente banda lateral de dos réplicas densidad espectral de potencia desplazadas $\pm\omega_c$ tal y como se muestra en la figura



El ancho de banda es B Hz o W rad/s. En este caso, es de 5 kHz.

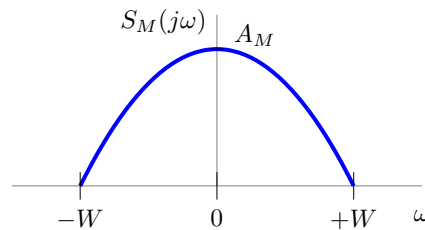
ii) El filtro de ruido es un filtro paso banda ideal, de ancho de banda 5 kHz y cuya banda de paso comienza en la frecuencia de portadora, como se muestra en la figura



La relación señal a ruido utilizando este tipo de modulación es igual a la obtenida en una transmisión en banda base, que se calculó en el primer apartado, 30 dB.

Ejercicio 3.14 Solución

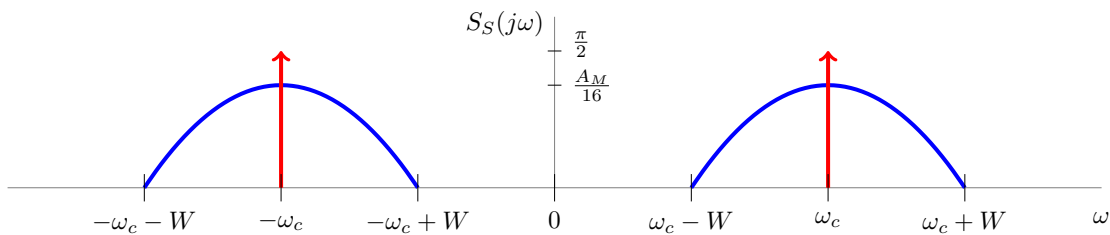
La densidad espectral de potencia de la señal moduladora es la de la figura



a) Para una modulación AM convencional, con índice de modulación a

$$S_S(j\omega) = \frac{A_c^2}{2} \pi [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] + \frac{A_c^2}{4} \frac{a^2}{C_M^2} [S_M(j\omega - j\omega_c) + S_M(j\omega + j\omega_c)]$$

donde dado el rango de la señal moduladora, en este caso, $C_M = 1$. Es decir, aparecen las dos deltas del espectro de la portadora, más las réplicas en $\pm\omega_c$ del espectro de la moduladora. Esta densidad se muestra en la Figura.

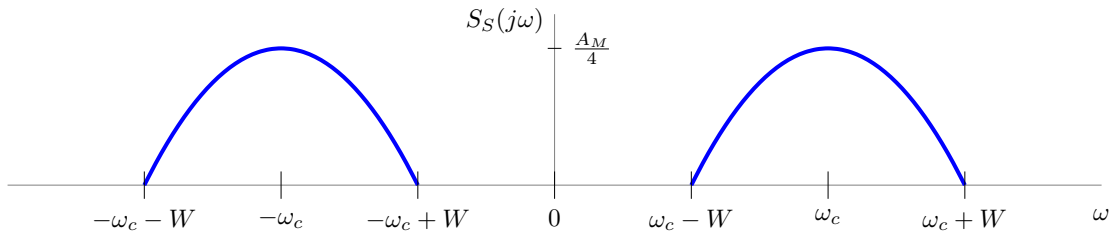


El ancho de banda es $2B$ Hz o $2W$ rad/s. En este caso, es de 10 kHz.

b) En el caso de una modulación de doble banda lateral, la densidad espectral de potencia para esta modulación es

$$S_S(j\omega) = \frac{A_c^2}{4} [S_M(j\omega - j\omega_c) + S_M(j\omega + j\omega_c)],$$

es decir, dos réplicas de la densidad espectral de potencia desplazadas $\pm\omega_c$, con un factor de escala en la amplitud $\frac{A_c^2}{4}$, lo que da lugar a la densidad que se muestra en la figura

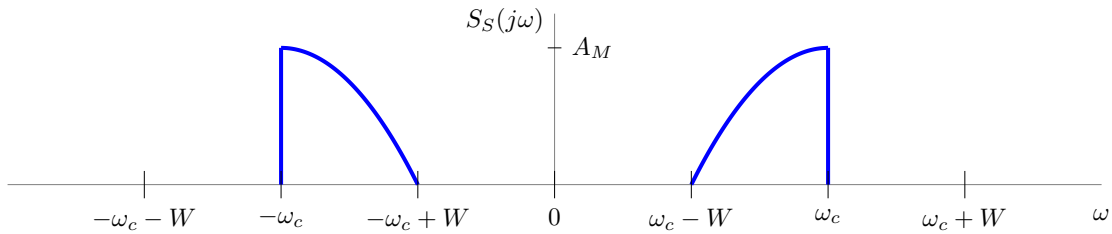


El ancho de banda es $2B$ Hz o $2W$ rad/s. En este caso, es de 10 kHz.

- c) En el caso de una modulación de banda lateral única de banda superior, la densidad espectral de potencia para esta modulación es

$$S_{S_{sup}}(j\omega) = \begin{cases} A_c^2 [S_M(j\omega - j\omega_c) + S_M(j\omega + j\omega_c)], & |\omega| \geq \omega_c \\ 0, & |\omega| < \omega_c \end{cases}$$

es decir, la parte de la correspondiente banda lateral de dos réplicas densidad espectral de potencia desplazadas $\pm\omega_c$ tal y como se muestra en la figura

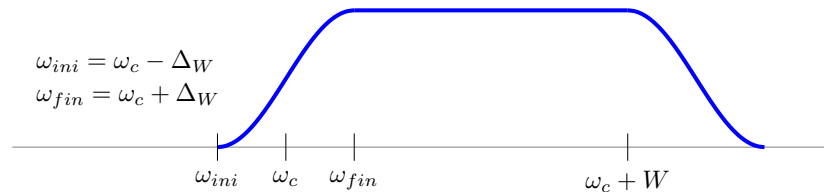


El ancho de banda es B Hz o W rad/s. En este caso, es de 5 kHz.

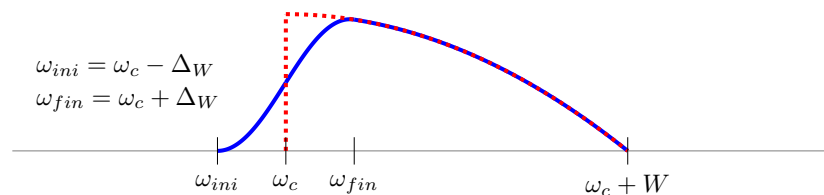
- d) En este caso tenemos una modulación de banda lateral vestigial
- 1) La respuesta en frecuencia tiene que tener una simetría impar respecto a la frecuencia portadora, lo que matemáticamente se traduce en que

$$H_{BLV}(j\omega - j\omega_c) + H_{BLV}(j\omega + j\omega_c) = 1 \text{ en } |\omega| \leq W.$$

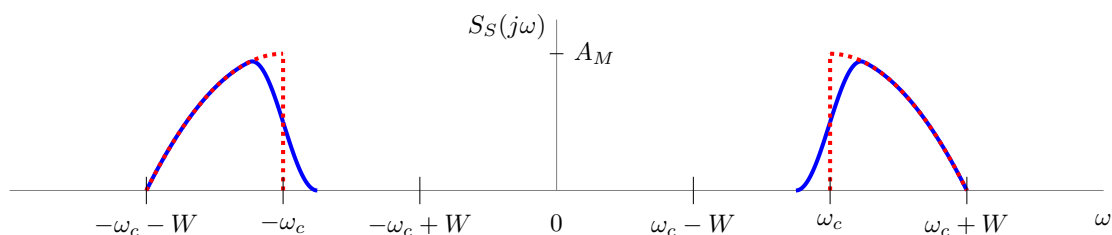
Un ejemplo de este tipo de respuesta sería la de la figura (frecuencias positivas)



- ii) La densidad espectral de potencia de la señal modulada, utilizando el filtro del ejemplo, sería la de la figura. En línea discontinua se superpone la forma de la densidad espectral de potencia para una modulación de banda lateral única. Sólo se representan las frecuencias positivas.



Representando tanto frecuencias positivas como negativas



III) El ancho de banda de la señal modulada es

$$BW_{BLV} = B + \Delta_B = 5,5 \text{ kHz.}$$

e) Para las modulaciones angulares

I) Para modulaciones de banda estrecha, la densidad espectral de potencia es aproximadamente igual a la de una modulación AM convencional pero con índice de modulación $a = 1$, con lo que sería igual que el apartado (a) pero con una amplitud $\frac{A_M}{4}$ para las réplicas del espectro.

II) En este caso el ancho de banda se aproxima mediante la *Regla de Carson*, que dice que

$$BW_{FM} \approx 2(\beta + 1)B = 2(5 + 1)B = 12B = 60 \text{ kHz.}$$